∽ Baccalauréat S Sportifs de haut-niveau ∾ septembre 1996

EXERCICE 1 **4 points**

Un tiroir contient, pêle-mêle, 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. Toutes les paires de chaussures sont de modèles différents.
N. B. : *Dans toutes les questions, les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.*

1. On tire simultanément 2 chaussures au hasard et l'on admet l'équiprobabilité de chaque tirage.
   a. Calculer la probabilité de l'évènement A « tirer 2 chaussures de la même couleur ».
   b. Calculer la probabilité de l'évènement B « tirer un pied gauche et un pied droit ».
   c. Montrer que la probabilité de l'évènement C « tirer les deux chaussures d'un même modèle » est $\dfrac{1}{19}$.
2. On ne conserve plus dans le tiroir qu'une paire de chaussures noires et une paire de chaussures rouges.
   On tire, successivement et sans remise, une chaussure du tiroir jusqu'à ce que le tiroir soit vide.
   On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième chaussure noire.
   a. Justifier que X prend les valeurs 2, 3 et 4.
   b. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

I.

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^2 - 6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)z + 9 = 0.$$

   On notera z_1 et z_2 les solutions trouvées, z_1 étant la solution de partie imaginaire positive.
   b. Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2 et donner l'écriture exponentielle de z_1 et de z_2.
2. Placer dans le plan P rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm, les images M_1 et M_2 de z_1 et z_2.
   Expliquer pourquoi M_1 et M_2 sont situés sur le cercle Γ de centre O et de rayon 3, que l'on tracera.

II. On considère la transformation f du plan P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \left(-\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z.$$

On considère les points A et B d'affixe $z_{\text{A}} = 3\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$ et $z_{\text{A}} = 3\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$ et A′ et B′ leurs images par f.

1. Montrer que f est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
2. Déterminer sous forme exponentielle, les affixes $z_{A'}$ et $z_{B'}$, des points A′ et B′.
   Placer les points A, B, A′ et B′ sur la figure.
   Expliquer pourquoi ces points sont sur le cercle Γ.
3. Calculer $\arg\left(\dfrac{z_{A'}}{z_{B'}}\right)$ et montrer que B et A′ sont symétriques par rapport au point O.
   En déduire que le triangle ABA′ est rectangle.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

A et B sont deux points du plan orienté dans le sens usuel et tels que AB = 6 cm.
On note : r_1 la rotation de centre A et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre B et d'angle de mesure $-\dfrac{2\pi}{3}$.
Pour tout point M du plan, on note M_1 et M_2 les images respectives de M par r_1 et r_2.

1. M étant le point de la figure ci-jointe, construire les points M_1 et M_2.
2. Le but de cette question est de démontrer que, pour tout point M du plan, le milieu du segment $[M_1M_2]$ est un point fixe I.
   On pose $f = r_1 \circ r_2^{-1}$ où r_2^{-1} désigne la transformation réciproque de r_2.
   a. Déterminer $f(M_2)$.
   b. Montrer que f est une symétrie centrale.
   c. En déduire que le milieu du segment $[M_1M_2]$ est un point fixe I que l'on placera sur la figure.
3. Dans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ tel que A et B aient pour affixes respectives -3 et 3.
   On note z_1 et z_2 les affixes respectives de M_1 et M_2.
   M est un point du plan, distinct de A et de B, d'affixe z.
   a. Exprimer z_1 et z_2 en fonction de z.
   Montrer que : $\dfrac{z_2 - z}{z_1 - z} = \text{i}\sqrt{3}\dfrac{z-3}{z+3}$.
   b. En déduire que :
   (1) : $\left(\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}\right) = \left(\overrightarrow{M\text{A}}, \overrightarrow{M\text{B}}\right) + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.
   (2) : $\dfrac{MM_2}{MM_1} = \sqrt{3}\dfrac{M\text{B}}{M\text{A}}$.
   c. Déterminer à l'aide de l'égalité (1) l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M, M_1, M_2 soient alignés.
   Construire (Γ) sur la figure de la question 1.

PROBLÈME **11 points**

L'objectif de la partie A *est de résoudre une équation différentielle (J) avec second membre. Dans la partie* B, *on étudiera une fonction, solution particulière de l'équation* (1), *à l'aide d'une fonction auxiliaire.*
Dans la partie C, *on déterminera l'aire d'une région du plan donnée.*
Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

On se propose de déterminer les fonctions définies sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ qui sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}\text{e}^{-x}. \qquad (1)$$

1. Montrer que la fonction p définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $p(x) = \text{e}^{-x}\ln x$ est une solution particulière de l'équation (1).
2. Démontrer qu'une fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ est solution de l'équation différentielle (1) si et seulement si la fonction $h = f - p$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \qquad (2)$$

3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \qquad (2)$$

4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

Partie B - Étude de fonctions

On se propose dans cette partie d'étudier une solution particulière de l'équation différentielle (1). Soit la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \text{e}^{-x}(3 + \ln x).$$

I. Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = -3 - \ln x + \frac{1}{x}.$$

1. Calculer les limites de g aux bornes de son domaine de définition.
2. Déterminer la fonction dérivée g' de g et dresser le tableau de variation de g.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α dans $]0\ ;\ +\infty[$ et que cette solution ex appartient à $[0{,}45\ ;\ 0{,}46]$.
4. Déduire de ce qui précède, l'étude du signe de $g(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

II. Étude de la fonction *f*

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 4 cm.

1. Étudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
   Pour calculer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$ on pourra établir que :

$$f(x) = 3\text{e}^{-x} + \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{x}{\text{e}^{x}} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

   Déduire de cette étude les asymptotes de la courbe $\mathscr{C}$.
2. Déterminer la fonction dérivée f' de f et vérifier que pour tout réel x strictement positif on a :

$$f'(x) = \text{e}^{-x} \cdot g(x).$$

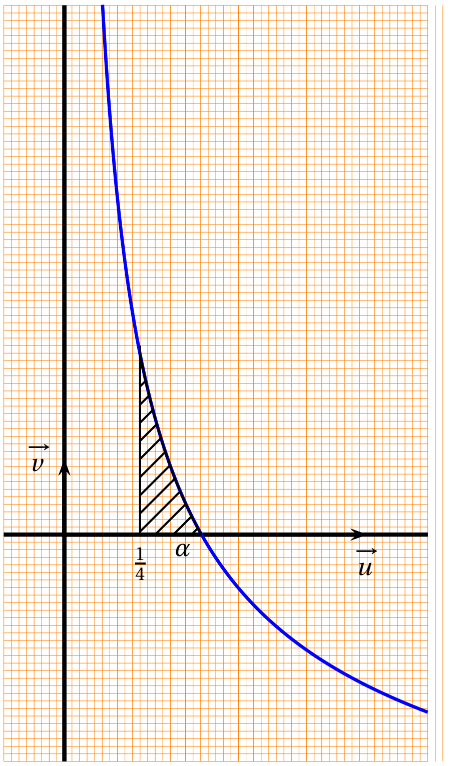
   Déduire de l'étude faite à la question 1. 4. les variations de f.
   Pour le calcul de $f(\alpha)$, on prendra la valeur approchée de α : $\alpha \approx 0,45$.
3. Déterminer le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C - Calcul d'aire

On considère dans le repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ ci-après (unité sur l'axe des abscisses : 4 cm, unité sur l'axe des ordonnées : 1 cm), la courbe de la fonction g définie par :

$$\text{Pour tout } x > 0 \qquad g(x) = -3 - \ln x + \frac{1}{x}.$$

α est la valeur déterminée en B. 1. c. telle que : $g(\alpha) = 0$.



1. Déterminer en fonction de α :

$$I = \int_{0,25}^{\alpha} \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

On pourra utiliser une intégration par parties.

2. **a.** Calculer, en fonction de α :

$$J = \int_{0,25}^{\alpha} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

b. Montrer que l'on a :

$$J = \alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\ln 2.$$

3. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ en cm^2 de la partie grisée sur la figure, en fonction de α.
Donner une valeur approchée de $\mathscr{A}$ en prenant $\alpha \approx 0,45$.