Durée : 4 heures

Baccalauréat C Strasbourg juin 1970

EXERCICE 1

Trouver tous les couples d'entiers naturels $(a,\ b)$ tels que le plus grand commun diviseur de a et de b soit 5 et le plus petit commun multiple de a et de b soit 8 160.

EXERCICE 2

Dans le plan complexe (P), on considère le point M d'affixe z et le point M' d'affixe z', tels que

$$z' = (1+\text{i})z + 1.$$

1. Trouver le module et l'argument du nombre $1+\text{i}$.
2. Exprimer les coordonnées $\left(x',\ y'\right)$ du point M' en fonction de celles $(x,\ y)$ du point M.
3. Trouver l'ensemble des points M du plan (P) tels que les vecteurs $\overrightarrow{\text{O}M}$ et $\overrightarrow{\text{O}M'}$ aient le même module.
4. Trouver le nom et les caractéristiques de la transformation ponctuelle dans laquelle M a pour image M'.

EXERCICE 3

Dans tout le problème, on utilise la définition suivante : Soit h une application d'un ensemble X dans un ensemble Y et A une partie de X. On appelle image de A par h, et l'on note $h(\text{A})$, l'ensemble des transformés par h des éléments de A

$$h(\text{A}) = \{y \in Y | \exists x \in \text{A},\, y = h(x)\}.$$

Soit (P) un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x,\, y'\text{O}y$. On note (E) la partie de (P) formée des points d'ordonnée non nulle.
Soit T l'application de (E) dans (P) associant au point m de coordonnées $(x\ ;\ y)$ le point $T(m)$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ déterminées par

$$x' = x \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{y}.$$

1. Montrer que T est injective et que $T(\text{E}) = (\text{E})$.
   On définit alors une application θ de (E) dans (E) par

   $$\theta(m) = T(m),$$

   pour tout point m de (E). Montrer que θ est involutive et déterminer ses points invariants.
2. Soit (C) la courbe d'équation

   $$4x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

   a. Déterminer la nature de (C) et la construire.

b. Montrer qu'il existe un polynôme $p(x\,;\,y)$ tel que $T(C \cap \text{E})$ soit l'ensemble des points de (P) dont les coordonnées, x et y, sont liées par la relation

$$p(x\,;\,y) = 0.$$

Construire la courbe $T(C \cap \text{E})$.

3. Soit (D) une droite de (P) ; on pose

$$(\Gamma) = T(D \cap \text{E}).$$

a. Nature de (Γ) lorsque (D) est parallèle à $x'\text{O}x$ ou à $y'\text{O}y$.

b. Lorsque (D) a pour équation $y = ax$ (a : nombre réel différent de 0), montrer que (Γ) est une hyperbole, (H_a), dont on déterminera les foyers et les asymptotes.

Étant donné deux nombres réels non nuls, a_1 et a_2, à quelle condition les hyperboles $\left(H_{a_1}\right)$ et $\left(H_{a_2}\right)$ sont-elles homothétiques ? Déterminer alors les homothéties transformant $\left(H_{a_1}\right)$ en $\left(H_{a_2}\right)$.

4. Soit $\overrightarrow{b}$ un vecteur parallèle à $x'\text{O}x$ et B la translation définie dans (P) par $\overrightarrow{b}$.

a. Montrer que $B(\text{E}) = (\text{E})$.

Soit alors β l'application de (E) dans (E) définie par

$$\beta(m) = B(m),$$

pour tout point m de (E). Établir que β est bijective et identifier son application réciproque, notée β^{-1}.

b. Montrer que β et θ commutent, autrement dit que l'on a

$$\beta \circ \theta = \theta \circ \beta.$$

En déduire que $\theta = \beta^{-1} \circ \theta \circ \beta$.

c. En utilisant la question b., montrer, à l'aide d'un choix convenable de $\overrightarrow{b}$, que toutes les droites du plan non parallèles aux axes ont pour images par θ des hyperboles équilatères.