Baccalauréat C Strasbourg juin 1973

EXERCICE 1

1. Étudier les variations et tracer la courbe représentative (C) de la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$$

En déduire que pour $a > 0$ et distinct d'une valeur que l'on précisera, il existe un seul réel b, différent de a, tel que

$$a\mathrm{e}^{b} = b\mathrm{e}^{a}$$

2. Calculer l'aire du domaine délimité par (C), son asymptote et les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$, où t désigne un réel strictement positif. Cette aire admet-elle une limite lorsque t tend vers $+\infty$?

EXERCICE 2

On considère les applications u, v et w de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par :

$$\begin{array}{lcl} u & : & z \longmapsto u(z) = \overline{z} + \dfrac{4\mathrm{i}}{\sqrt{3}} \\ v & : & z \longmapsto v(z) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\overline{z} + \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right) \\ w & = & v \circ u \end{array}$$

1. Calculer $w(z)$.
2. Montrer que u et v sont involutives.
3. On associe respectivement à u, v, w les transformations ponctuelles U, V, W d'un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé. Quelle est la nature des transformations U, V, W ?

   Indiquer les éléments caractéristiques de W.

PROBLÈME

On considère l'ensemble D des quadruplets d'entiers naturels (a, b, c, d) qui vérifient les conditions :

$$\begin{array}{lccc} (1) & ad - bc & = & 1 \\ (2) & a & < & b \end{array}$$

1.
   a. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, le quadruplet $(1, n, 0, 1)$ est-il un élément de D ?

   b. Démontrer que le produit abd est différent de zéro, que les fractions $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ sont irréductibles et que $\dfrac{c}{d} < \dfrac{a}{b}$.

   (On rappelle que « $\dfrac{a}{b}$ est irréductible » signifie que a et b sont premiers entre eux).

   Dans la suite P désigne un espace vectoriel réel rapporté à la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

   Soit F l'ensemble des applications f de P dans P qui associent au vecteur $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath}$, le vecteur $\overrightarrow{V} = X\overrightarrow{\imath} + Y\overrightarrow{\jmath}$ tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} X & = & ax+cy \\ Y & = & bx+dy \end{array}\right. \quad \text{où } (a,\, b,\, c,\, d) \in D.$$

2. On considère les vecteurs $\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{V_0} = 4\overrightarrow{\imath} + 9\overrightarrow{\jmath}$.

Chercher les éléments f de F tels que $f\left(\overrightarrow{v_0}\right) = \overrightarrow{V_0}$.

(On pourra, par exemple, se ramener à la résolution de l'équation $4\lambda - 9\mu = 1$ où λ et μ seront à déterminer d'abord dans $\mathbb{Z}$).

En déduire qu'il existe une seule application f répondant à la question.

3. Soient f et g deux éléments quelconques de F.

Montrer que f est une bijection de P dans P. L'application réciproque est-elle un élément de F ? Montrer que $f \circ g$ est un élément de F.

Dans le cas, où P est euclidien et la base $\left(\overrightarrow{\imath},\, \overrightarrow{\jmath}\right)$ orthonormée, f peut-elle être une isométrie ?

4. **a.** Déterminer, suivant le choix de f dans F, l'ensemble des vecteurs de P invariants par f.

b. Soit f un élément donné de F. Quelle est l'image Δ' par f de la droite vectorielle Δ d'équation $y = \alpha x$?

Quelle est la réunion des images Δ' lorsque α décrit $\mathbb{R}_+$?

(On pourra représenter Δ' par une droite affine D' passant par un point fixe O).