Baccalauréat C Strasbourg septembre 1970

EXERCICE 1

Comment faut-il choisir l'entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$) pour que $2^n - 1$ soit divisible par 9 ?
À quelle condition relative aux entiers naturels x et y la division par 9 de $2^x 11^y$ donne-t-elle 1 pour reste ?

EXERCICE 2

Étant donné deux nombres réels a et b, avec $a < b$, on note $[a\ ;\ b]$ l'ensemble des nombres réels compris (au sens large) entre a et b

$$[a\ ;\ b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

On considère l'application f de $[0\ ;\ +2]$ dans $\mathbb{R}$ déterminée par

$$f(y) = y^2 + 2y - 3,$$

pour tout y de $[0\ ;\ +2]$.
Montrer que f définit une bijection de $[0\ ;\ +2]$ sur $[-3\ ;\ +5]$ et préciser l'application réciproque de cette bijection ; on la notera φ.
Montrer que φ est dérivable sur $[-3\ ;\ +5]$ et calculer sa dérivée.

EXERCICE 3

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, M_1 et M_2 sont les images des racines complexes z_1 et z_2 de l'équation du second degré

$$(\text{E}) \quad z^2 - 2(a + \text{i}b)z + a + b + \frac{1}{8} = 0,$$

où a et b sont des paramètres réels et où i est le nombre complexe dont l'image a pour coordonnées $(0\ ;\ +1)$.

Partie A

1. Quelle est la somme des arguments de z_1 et de z_2 ?
2. Quelles sont les bissectrices de l'angle de droites $(OM_1,\ OM_2)$?

Partie B

1. Quelle est l'affixe du milieu de M_1M_2 ? Comment doit-on choisir a et b pour que l'équation (E) ait ses deux racines égales et réelles ?
   On vérifiera qu'il existe deux couples $(a\ ;\ b)$ répondant à cette question et l'on notera P et Q les images des racines doubles correspondantes.
2. Comment doit-on choisir a et b pour que l'équation (E) ait ses deux racines égales et imaginaires pures ?
   On vérifiera qu'il existe aussi deux couples $(a\ ;\ b)$ répondant à la question et l'on notera R et S les images des racines doubles correspondantes.
3. Vérifier que l'un quelconque des points P, Q, R et S est l'orthocentre du triangle ayant pour sommets les trois autres points.
4. Former les équations des deux cercles admettant pour diamètres PQ et RS. Vérifier que ces deux cercles sont orthogonaux.

Partie C

Étant donné deux nombres réels x et y, on appelle T le point d'affixe $t = x + iy$.

1. Calculer en fonction de a, b, x et y la partie réelle u et la partie imaginaire v du nombre complexe

$$\omega = (t - z_1)(t - z_2),$$

où z_1 et z_2 sont toujours les racines de l'équation (E).

Vérifier que u et v peuvent être mises sous la forme

$$u = Aa + Bb + C \quad \text{et} \quad v = A'a + B'b + C',$$

où A, B, C, A', B' et C' sont des fonctions des variables x et y.

2. À chaque nombre complexe $t = x+\mathrm{i}y$, on associe l'ensemble E_t constitué dans le plan par les points d'affixe ω obtenus lorsque a et b décrivent l'ensemble des réels.

Préciser, suivant la valeur de t, la nature de E_t en distinguant les cas où les vecteurs $\overrightarrow{\alpha}$, de composantes scalaires $(A\ ;\ A')$, et $\overrightarrow{\beta}$, de composantes $(B\ ;\ B')$ sont linéairement indépendants ou non.

Dans le cas de la dépendance, démontrer que E_t contient O si, et seulement si, T est l'un des points O, T_1 et T_2, où T_1 et T_2 désignent les points communs aux cercles de diamètres PQ et RS.

3. Déduire des résultats précédents que les bissectrices des angles de droites $(T_1M_1, \infty T_1M_2)$ et $(T_2M_1, \infty T_2M_2)$ sont indépendantes de a et de b.

Quelles sont ces bissectrices ?