Durée : 4 heures

↫ Baccalauréat C Strasbourg juin 1969 ↬

EXERCICE 1

Résoudre en nombres entiers $(x,\ y)$ l'équation

$$x^2 - y^2 = 1\,969.$$

EXERCICE 2

Dans un repère orthonormé on considère la courbe $(\mathscr{L})$ d'équation $y = \text{Log}\, x$ et la courbe $\left(\mathscr{L}'\right)$ d'équation $y = \text{Log}\, 3x$.

1. Par quelle transformation géométrique peut-on déduire $\left(\mathscr{L}'\right)$ de $(\mathscr{L})$?
2. On donne deux nombres réels, h et x_0 ; on suppose h positif $(h > 0)$ et x_0 appartenant à l'intervalle $[+1\ ;\ +\infty[$.

   Les droites d'équations $x = x_0$ et $x = x_0 + h$ coupent $(\mathscr{L})$ [respectivement $\left(\mathscr{L}'\right)$ en A et B (respectivement A$'$ et B$'$).

   Évaluer l'aire du domaine limité par le contour ABB$'$A$'$A.

   La formule obtenue est-elle encore valable lorsque x_0 est choisi dans l'intervalle $]0\ ;\ +1[$?

PROBLÈME

Le plan est rapporté au repère or honormé direct $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, dont les axes sont notés $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$. Deux points, P et Q, appartiennent respectivement aux droites $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$ de façon que la distance PQ soit égale à l'unité de longueur ; on pose

$$\left(\overrightarrow{\text{O}x},\ \overrightarrow{\text{PQ}}\right) = \theta \quad (\text{mod } 2\pi).$$

PREMIÈRE PARTIE - Dans cette partie, θ est donné. [1]

1. Construire les deux points P et Q. En déduire les dispositions relatives des points P, Q (associés à θ) et P$'$, Q$'$ (associés à θ') dans chacune des hypothèses suivantes :

$$\theta + \theta' = 0\,; \quad \theta + \theta' = \pi\,; \quad \theta - \theta' = \pi.$$

2. **a.** Donner, en fonction de θ, les coordonnées des points P et Q.

   b. On appelle R le point du plan déterminé ainsi : le triangle PQR est rectangle en R et isocèle et

$$\left(\overrightarrow{\text{QP}},\ \overrightarrow{\text{QR}}\right) = +\frac{\pi}{4} \quad (\text{mod}\, 2\pi).$$

   Soit p, q, r les nombres complexes affixes des points P, Q, R dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

   Exprimer r en fonction de p et q et en déduire les coordonnées de R en fonction de θ.

1. Le sujet remis aux candidats comportant des erreurs, la composition a été refaite. Le texte que nous publions ici est le texte rectifié, c'est-à-dire le texte sans les erreurs. (Note du Service des Annales.)

3. **a.** Soit M le barycentre du système formé des trois points P, Q, R affectés respectivement des coefficients réels $\alpha,\ \beta, 2\gamma\ (\alpha+\beta+2\gamma \neq 0)$.
Vérifier que le point M a pour coordonnées

$$x = \frac{1}{\alpha+\beta+2\gamma}[y\sin\theta - (\alpha+\gamma)\cos\theta]$$

$$\text{et}\quad y = \frac{1}{\alpha+\beta+2\gamma}[(\beta+\gamma)\sin\theta - \gamma\cos\theta].$$

b. On choisit $\alpha = \beta = 1$ et $\gamma = 0$: préciser la position, M_0, du barycentre.

c. Comment doit-on choisir α, β et γ pour que M appartienne à la droite PQ (hypothèse n° 1) ; pour que M appartienne à la droite RM_0 (hypothèse n° 2) ?

DEUXIÈME PARTIE - Dans cette partie, θ décrit l'intervalle $]-\pi\ ;\ +\pi]$.

1. Déterminer l'ensemble des points M_0.

2. Démontrer que, α, β et γ étant choisis conformément à l'hypothèse n° 1, l'ensemble des points M est en général une ellipse, dont on précisera l'axe focal ; examiner les cas singuliers.

3. α, β et γ sont choisis conformément à l'hypothèse n° 2 et l'on pose

$$k = \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}.$$

a. Préciser les ensembles, $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_{-1}$ des points M obtenus respectivement pour $k = 1$ et $k = -1$.

b. On suppose $k^2 - 1 \neq 0$.
Etablir que, pour une valeur donnée de k, l'ensemble, $\mathcal{E}_k$ des points M a pour équation

$$(x-ky)^2 + (kx-y)^2 = \frac{\left(k^2-1\right)^2}{4}.$$

Écrire l'équation de $\mathcal{E}_k$ dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}', \overrightarrow{\jmath}'\right)$ déduit de $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, par la rotation de centre O et d'angle $+\dfrac{\Pi}{4}$; reconnaître alors l'ensemble $\mathcal{E}_k$.

Deuxième composition [2]

Exercice 1

On définit la fonction f de la variable réelle y de la façon suivante :

$$x = f(y) = y^2 + y - 1, \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant y \leqslant 5.$$

Quelle propriété du programme peut-on invoquer pour justifier l'existence d'une fonction φ telle que

$$x = f(y) \iff y = \varphi(x), \quad \text{avec} \quad -1 \leqslant x \leqslant 29\,?$$

Calculer effectivement y en fonction de x, en donnant l'expression algébrique de $\varphi(x)$.

2. Sujet donné aux candidats

Calculer la dérivée $y' = \varphi'(x)$.

EXERCICE 2

Soit a et b deux nombres complexes, distincts ou non, donnés ; on considère l'équation

$$\text{(E)} \qquad z^2 - (b+1)z + a = 0,$$

où z est une inconnue complexe.

1. À quelle condition concernant a et b l'équation (E) a-t-elle deux racines distinctes ?
2. Résoudre (E) dans le cas particulier où $a = \mathrm{i} - 1$ et $b = 2\mathrm{i}$.

EXERCICE 3

On donne, dans un plan (P), un repère orthonormé $x'\mathrm{O}x,\ y'\mathrm{O}y$. Soit m un point variable de (P) ; on appelle x et y respectivement l'abscisse et l'ordonnée de m. Soit M un point de (P), dont l'abscisse, X, et l'ordonnée, Y, sont définies en fonction des coordonnées de m par les relations

$$X = \frac{1}{y} \quad \text{et} \quad Y = \frac{1}{x}$$

On appelle T la transformation ponctuelle qui transforme m en M.

Partie A

1. Trouver l'ensemble, (P_1), des points m de (P) qui ont un transformé, M, par T.
2. Démontrer que T est une application bijective et involutive de (P_1) sur lui-même.
3. Démontrer que O, m et M sont alignés.
4. Trouver l'ensemble des points invariants par T.

Partie B

On donne, dans (P), une droite (D), d'équation $ax + by + c = 0$; on pose

$$(D_1) = (D) \cap (P_1)$$

Soit $\left(D_1'\right)$ la transformée de (D_1) par T.

1. Former l'équation de $\left(D_1'\right)$.
2. On suppose que $abc = 0$.
   Montrer que (D_1) est une droite privée d'un point.
   Comparer $\left(D_1'\right)$ à (D_1).
3. On suppose que $abc \neq 0$.
   Montrer que (D_1) est une hyperbole prIvee d'un point. ,Préciser les asymptotes de l'hyperbole et calculer sa distance focale en fonction de a, b et c.

Partie C

À tout point m de (P_1) on associe à présent le point M', d'abscisse X' et d'ordonnée Y', telles que

$$X' = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad Y' = \frac{1}{y}.$$

Soit T' la transformation ponctuelle qui transforme m en M'.

1. Trouver les points invariants par T'.
2. Montrer que T' est le produit (ou la composée), dans un ordre quelconque de T et d'une transformation ponctuelle simple, S, que l'on précisera. Utiliser cette propriété, ainsi que certains résultats établis dans les parties A ou B, pour traiter géométriquement (c'est-à-dire sans calcul) les deux questions suivantes.
3. Montrer que T' est une application bijective et involutive de (Pl) sur lui-même.
4. Déterminer les droites dont la partie contenue dans (Pl) est invariante par T'.