

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Strasbourg juin 1972 ∞

EXERCICE 1

Soit (E) un espace vectoriel sur \mathbb{R} , de dimension 2 rapporté à une base (\vec{i}, \vec{j}) , et f l'application linéaire, dont la matrice dans la base (\vec{i}, \vec{j}) est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Pour tout réel, λ , on note (E_λ) l'ensemble des vecteurs \vec{u} de (E) tels que $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$.

1. Démontrer que f est un automorphisme involutif de (E) .
2. Démontrer que, si λ est un réel distinct de -1 et de 1 , (E) se réduit au vecteur nul.
3. Déterminer (E_1) et (E_{-1}) en donnant une base pour chacun d'eux.
Démontrer que ce sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.
En déduire une nouvelle base de (E) et donner la matrice de f dans cette base.

EXERCICE 2

On note $\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}$ et $\dot{5}$ les éléments de l'anneau $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \times)$.

1. Dresser la table de multiplication de l'anneau.
2. Résoudre, dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, l'équation $\dot{2}x = \dot{0}$.
3. Résoudre, dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, le système

$$\begin{cases} \dot{2}x + \dot{2}y = \dot{4}, \\ \dot{5}x + \dot{3}y = \dot{3}. \end{cases}$$

PROBLÈME

On désigne par \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels et par \mathbb{R}_+ le sous-ensemble des nombres réels positifs ou nul.

1. Étudier la fonction de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} définie par

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f(x) = x \text{Log } x \text{ pour } x > 0. \end{cases}$$

On étudiera, en particulier, la continuité et la dérivabilité au point 0.

Tracer la courbe représentative de la fonction f , le plan étant rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé. (On prendra une unité graphique de 4 cm sur chaque axe.)

On précisera les tangentes aux points d'intersection avec l'axe Ox .

2. Étudier la fonction de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} définie par

$$\begin{cases} g(0) = 0, \\ g(x) = \frac{x^2}{2} \text{Log } x - \frac{x^2}{4} \text{ pour } x > 0. \end{cases}$$

On étudiera, en particulier, la continuité et la dérivabilité au point 0.

Tracer la courbe représentative de la fonction g sur le même graphique que la courbe représentative de f .

Préciser les tangentes aux points d'intersection avec l'axe Ox .

3. Recherche des solutions non nulles de l'équation $f(x) = g(x)$.

- a.** Démontrer que les solutions non nulles de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives de la fonction logarithme népérien et de la fonction homographique, h , définie, pour x réel et distinct de 2, par $h(x) = \frac{x}{2(x-2)}$.

(Le tracé des courbes n'est pas demandé.)

- b.** Comparer les signes de $h(3) - \text{Log}3$ et de $h(4) - \text{Log}4$. En déduire l'existence d'une solution de l'équation $f(x) = g(x)$, comprise entre 3 et 4. Démontrer qu'elle est unique dans cet intervalle.

- c.** Démontrer, de même, l'existence et l'unicité d'une solution, notée α , comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1; déterminer la valeur décimale approchée, à 10^{-1} près par défaut, du nombre réel α .

4. Soit t un nombre de l'intervalle ouvert $]0; \alpha[$, où α est le réel défini à la question 3. c.

- a.** Calculer, en fonction de t et de α , l'intégrale

$$I(t, \alpha) = \int_t^\alpha [g(x) - f(x)] dx.$$

- b.** Démontrer que $I(t, \alpha)$ a une limite quand t tend vers 0 et que cette limite est la valeur en α d'une fraction rationnelle.