Baccalauréat C Strasbourg juin 1974

EXERCICE 1

Soit k un nombre réel compris entre 0 et 1 : $k \in]0\,;\,1[$.
Soit f la fonction $x \longmapsto kx+1-k$ de l'ensemble des nombres réels positifs $\mathbb{R}_+$ dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, et g la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} g(0) & = & 0 \\ g(x) & = & x^k, \quad \text{si } x > 0 \end{array}\right.$$

On rappelle que $x^k = \mathrm{e}^{k \operatorname{Log} x}$.
Comparer suivant les valeurs de x, $f'(x)$ et $g'(x)$. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \int_1^x f'(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_1^x g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

puis que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad f(x) \geqslant g(x)$.
Que signifie cette inégalité pour les courbes représentatives de f et g ?

EXERCICE 2

1. Démontrer par récurrence que, quel que soit l'entier naturel n, non nul, 2 n-l

$$1+2\mathrm{i}+3\mathrm{i}+\ldots+n\mathrm{i}^{n-1} = \frac{-(n+1)\mathrm{i}^{n+1}-n\mathrm{i}^n+\mathrm{i}}{2}$$

2. En déduire que, quel que soit l'entier naturel k, non nul,

$$1-3+5-7+\ldots+(2k+1)(-1)^k = (k+1)(-1)^k$$

$$\text{et} \quad 2-4+6-\ldots+2k(-1)^{k-1} = \frac{1-(2k+1)(-1)^k}{2}$$

PROBLÈME

Partie A

Soit $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien V_3 de dimension 3.
On désigne par φ l'endomorphisme de V_3 défini par :

$$\varphi\left(\vec{\imath}\right) = \vec{\imath}, \quad \varphi\left(\vec{\jmath}\right) = \vec{\jmath}, \quad \varphi(k) = \frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}$$

1. Soit X, Y, Z les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ de V_3.
   Exprimer les coordonnées X_1, Y_1, Z_1 du vecteur $\overrightarrow{u_1}$ transformé de $\vec{u}$ par φ en fonction de X, Y et Z.
2. Déterminer le noyau et l'image de φ. Reconnaître φ.
3. On donne a, b, c réels, Quelle est l'image par φ du plan vectoriel d'équation $aX+bY+cZ=0$? Discuter.

N. B. La suite du problème est indépendante de cette dernière question A 3.

Partie B

Soit $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$ un repère orthonormé d'un espace affine euclidien E_3 associé à V_3. On désigne par f l'application affine de E_3 dont l'endomorphisme associé est φ et telle que $f(\text{O}) = 0$.

1. Montrer que l'image du point M de coordonnées x, y, z est le point M_1 de coordonnées x_1, y_1, z_1 telles que :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x_1 & = & x + \dfrac{1}{2}z\\ y_1 & = & y + \dfrac{1}{2}z\\ z_1 & = & 0 \end{array}\right.$$

2. On désigne par A_1, B_1, C_1, D_1 les images respectives de $\text{A}(1~;~0~;~1)$, $\text{B}(-1~;~0~;~1)$, $\text{C}(-1~;~0~;~-1)$, $\text{D}(1~;~0~;~-1)$.
Quelle est l'image par f du segment AB ?
Quelle est la figure géométrique $\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{D}_1$?
3. On considère le plan dont un repère est $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
Soit Γ le cercle de ce plan, de centre O et de rayon 1. Ce cercle a donc pour équations :

$$y = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + z^2 = 1$$

Soit Γ_1 l'image de Γ par f. Montrer que Γ_1 a pour équations

$$z_1 = 0 \quad \text{et} \quad x_1^2 + 5y_1^2 - 2x_1y_1 = 1.$$

Partie C

On se propose, dans cette partie, de déterminer la nature de Γ_1. On oriente le plan dont un repère est $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ en choisissant $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ comme repère direct, Soit $\left(\text{O},~\vec{i'},~\vec{j'}\right)$ le repère se déduisant de $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ par la rotation plane de centre 0 et d'angle de détermination α ($a \in [0~;~2\pi[$).
Soit M_1 le point de coordonnées x_1 et y_1 dans $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ et de coordonnées x' et y' dans $\left(\text{O},~\vec{i'},~\vec{j'}\right)$.
On admettra que :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x_1 & = & x'\cos\alpha - y'\sin\alpha\\ y_1 & = & x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{array}\right.$$

1. Quelle est l'équation de Γ_1 dans $\left(\text{O},~\vec{i'},~\vec{j'}\right)$?
2. Montrer qu'il existe une valeur et une seule α_1 de α, strictement comprise entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ telle que l'équation de Γ_1 dans le repère $\left(\text{O},~\vec{i'},~\vec{j'}\right)$ soit de la forme : $kx'^2 + \ell y'^2 = 1$.
$\left(\text{On pourra montrer que } \alpha_1 \text{ vérifie l'équation } \text{tg}\,2\alpha = \dfrac{1}{2}\right)$.
3. Montrer alors que Γ_1 est une ellipse dont on déterminera le grand axe et le petit axe.

Partie D

1. Montrer que si $\vec{w}$ désigne un vecteur directeur de la tangente en M à Γ, alors $\varphi\left(\vec{w}\right)$ est un vecteur directeur de la tangente en $M_1 = f(M)$ à Γ_1. (On pourra exprimer les coordonnées de M en fonction d'un paramètre t).
2. En déduire que Γ_1 est tangente aux quatre côtés du quadrilatère $\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{D}_1$ en des points que l'on précisera.