Durée : 4 heures

☙ Baccalauréat C juin 1975 Strasbourg ❧

EXERCICE 1

Dans un plan affine rapporté au repère $\left(\text{A},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, soit B et C les points de coordonnées respectives (1 ; 0) et (0 ; 1).
Soit t un nombre réel non nul. On note f, g, h les homothéties de rapport t et de centres respectifs A, B, C.
À partir d'un point M quelconque du plan, on introduit les points

$$M_1 = f(M),\quad M_2 = g\left(M_1\right),\quad M_3 = h\left(M_2\right),\quad M_4 = f\left(M_3\right)$$

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\text{A}M_4}$ en fonction de t et des vecteurs $\overrightarrow{\text{A}M}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$.
2. Soit φ_1 l'application du plan dans lui-même définie par :

$$\varphi_1(M) = M_4 \quad \text{pour tout point } M.$$

Déterminer suivant les valeurs de t l'ensemble des points invariants par φ_1 et préciser la nature correspondante de φ_1.

EXERCICE 2

1. x et y étant deux entiers relatifs, déterminer tous les restes possibles de la division euclidienne par 4 du nombre $x^2 - 3y^2$
2. Existe-t-il trois entiers relatifs x, y, z tels que :

$$x^2 - 3y^2 + 4z = 3\ ?$$

PROBLÈME

Soit E un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$.

1. Au point M d'affixe $z = x + \text{i}y$ $(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}^2)$ on fait correspondre le point M' d'affixe

$$z' = \frac{4 - \left(z + \overline{z}\right)\text{i}}{1 - \text{i} + \frac{1}{2}\left(z - \overline{z}\right)}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugue de z. On définit ainsi une application T de E dans E.

a. Calculer les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ du point M' en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ du point M.

b. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z' soit réel. Mêmes questions pour z' imaginaire pur.

c. Écrire une équation de l'ensemble H des points M tels que M' appartienne à la droite d'équation $x = 1$.

2. **a.** Étudier la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = 1 - x + \sqrt{x^2 + 3}.$$

Tracer sa courbe représentative C dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$.

b. Déduire de l'étude précédente que f admet une fonction réciproque g, dont on précisera l'ensemble de définition D.

Montrer que, pour tout x de D, $\quad g(x) = \dfrac{3 - (x-1)^2}{2(x-1)}$.

Tracer la courbe représentative C_1 de g dans le même repère.

3. **a.** Calculer $\displaystyle\int_2^{1+\sqrt{3}} g(x)\,\text{d}x$.

b. En déduire $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x$, puis $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+3}\,\text{d}x$

4. Établir une équation de la courbe C' symétrique de C par rapport au point S de coordonnées $(0\,;\,1)$, puis une équation de $\Gamma = C \cup C'$. Comparer Γ et H.

5. **a.** Soit $\mathcal{T}$ l'application affine du plan E dans lui-même qui au point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ fait correspondre le point M_1 de coordonnées $\left(x_1\,;\,y_1\right)$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \dfrac{x}{2} \\ y >_1 & = & x + y \end{array}\right.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $M_{n+1} = \mathcal{T}\left(M_n\right)$.

Calculer les coordonnées $\left(x_n\,;\,y_n\right)$ de M_n en fonction de x, y et n.

Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels x_n et y_n ont une limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$.

b. Quel est l'ensemble des points invariants par $\mathcal{T}$?

Soit M un point non invariant par $\mathcal{T}$. La droite définie par le bipoint $(M,\ M_1)$ coupe Oy en P.

Montrer qu'il existe un réel non nul k, indépendant de M, tel que

$$\overrightarrow{PM_1} = k\overrightarrow{PM}.$$

et que le vecteur $\overrightarrow{MM_1}$ est colinéaire à un vecteur fixe.

c. Quelle est une équation de Γ', image de Γ par $\mathcal{T}$?

En déduire que Γ' est une conique dont on précisera les sommets.