Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Strasbourg juin 1976 ∾

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3 - \left|e^{4x} - 2e^{2x}\right|$$

(on désigne par e la base de la fonction logarithme népérien notée Log).

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
2. Donner la définition de la dérivabilité en x_0 d'une fonction numérique d'une variable réelle.
   Application : la fonction f est-elle dérivable en $x_0 = \dfrac{1}{2}\text{Log}\,2$?
3. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative.

EXERCICE 2

Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z + 3\overline{z} = \left(2 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right) . |z|$$

Représenter les images des solutions de cette équation dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct.

PROBLÈME

Soit P un plan vectoriel, I l'application identique de P et ω l'application nulle de P.

$$\mathrm{I} : \begin{array}{ccc} P & \to & P \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \overrightarrow{u} \end{array}, \qquad \omega : \begin{array}{ccc} P & \to & P \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \overrightarrow{0} \end{array}$$

Préliminaires : Pour cette seule question P est euclidien orienté et muni d'une base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Soit g la rotation vectorielle dont une mesure de l'angle est θ.

a. Écrire la matrice de g dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

b. Démontrer que $g \circ g - (2\cos\theta)g + \mathrm{I} = \omega$.

On se propose d'étudier tous les endomorphismes f de P vérifiant :

$$f \circ f - (2\cos\theta)f + \mathrm{I} = \omega \qquad (1)$$

où θ est un réel donné de l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$.

Soit f une solution de (1) .

1. Chercher le noyau de f et montrer que f est une application bijective de P dans P.
2. Démontrer que si f est involutive, alors $f = (cos\theta)\mathrm{I}$. En déduire les valeurs de θ pour lesquelles (1) admet des solutions involutives et donner ces solutions.
3. On suppose θ différent de 0 et de π ? Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de P et $\overrightarrow{v}$ défini par :

$$\overrightarrow{v} = \frac{1}{\sin\theta}\left[-(cos\theta)\overrightarrow{u} + f\left(\overrightarrow{u}\right)\right] \qquad (2)$$

a. Montrer que pour tout réel k, le noyau de $f - kI$ est égal à $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

En déduire qu'il n'existe pas de réel λ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$ et que $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ est une base de P.

b. En utilisant (2) déterminer la matrice de f dans la base $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. Est-il possible de conclure que f est une rotation vectorielle ?

c. Soit φ l'application de P^2 dans $\mathbb{R}$, qui à tout couple $\left(\overrightarrow{w},\ \overrightarrow{w'}\right)$ de P^2 tel que

$$\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}, \quad \overrightarrow{w'} = x'\overrightarrow{u} + y'\overrightarrow{v}$$

associe le réel $xx' + yy'$.
Démontrer que φ est un produit scalaire sur P.
Vérifier que pour ce produit scalaire, la base $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ est orthonormée.

P étant muni de ce produit scalaire et de la base $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ supposée directe, quelle est la nature de f ?

4. On suppose $\theta = 0$.

a. Vérifier que (1) est alors équivalente à

$$(f - \mathrm{I}) \circ (f - \mathrm{I}) = \omega \qquad (3)$$

f étant une solution de (3), démontrer que le noyau de $f - \mathrm{I}$ n'est pas $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

b. $\overrightarrow{u}$ étant un vecteur non nul du noyau de $f - \mathrm{I}$, soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de P tel que $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ soit une base de P. La matrice de f dans cette base est de la fore $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ où λ et μ sont des réels.

Montrer que $\mu = 1$.

c. Si f est solution de (3) différente de I vérifier que $f - \mathrm{I} = s \circ h \circ p$ où p est la projection sur la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{v}$ de direction la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{u}$, h l'homothétie vectorielle de rapport λ et s une symétrie vectorielle dont on déterminera les éléments.

d. On définit, pour tout entier naturel n, f^n par

$$f^0 = \mathrm{I}, \quad f^n = f^{n-1} \circ f.$$

Déterminer la matrice de f^n dans la base $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

N. B. - Les questions 1., 2., 3., 4. sont indépendantes entre elles et indépendantes des préliminaires.