∽ Baccalauréat C Strasbourg juin 1977 ∾

EXERCICE 1 **5 POINTS**

1. Étudier la fonction f

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1-\mathrm{e}^x \end{array}$$

Représenter graphiquement cette fonction dans un repère orthonormé, préciser les branches infinies.

2. Soit λ un nombre réel et la fonction

$$f_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda(x+1)-\mathrm{e}^x \end{array}$$

On note Γ_λ la courbe représentative de f_λ.
Trouver l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles f_λ admet un maximum.
Soit M_λ le point d'ordonnée maximale de f_λ ; donner une équation de l'ensemble des points M_λ ?

EXERCICE 2 **3 POINTS**

Soit a un nombre réel strictement positif différent de 1.

1. Montrer qu'il existe une suite (u_n) à termes positifs définis par

$$\left\{\begin{array}{rcl} & u_0 & = & 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} : & u_{n+1} & = & \dfrac{1+au_n}{a+u_n}. \end{array}\right.$$

Vérifier que la suite (v_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{-1+u_n}{1+u_n}$$

est une suite géométrique de raison $\dfrac{a-1}{a+1}$.

2. Étudier la limite de la suite (v_n) ; en déduire celle de (u_n).

PROBLÈME 2 **12 POINTS**

Soit E un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. On désigne par D la droite passant par O, de vecteur directeur $\vec{\jmath}$, et par Γ le cercle de rayon unité ayant pour centre le point de coordonnées $(1\,;\,0)$.

1. Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des applications affines f de E dans E qui, à tout point M de coordonnées $(x\,;\,y)$, associent le point $f(M)$ dont les coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ sont de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & ax \\ y' & = & bx+cy+d \end{array}\right.$$

où a, c sont des réels non nuls, et où b, d sont des réels quelconques.
Montrer que ces applications sont bijectives et laissent la droite D invariante ($f(D) = D$).
Réciproquement, montrer que toute application affine bijective de E dans E laissant la droite D invariante est élément de $\mathscr{A}$.

2. Montrer que $\mathscr{A}$ est un groupe pour la loi de composition des applications.

3. Quels sont les éléments involutifs de $\mathscr{A}$?

4. Quelles sont les similitudes directes appartenant à $\mathscr{A}$? Les caractériser géométriquement.

5. À tout point M de coordonnées $(x\,;\,y)$, on associe le nombre complexe $z = x + \text{i}y$, appelé affixe de M.

Soit s l'application de E dans E qui, à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe $z' = 2\overline{z} - 3\text{i}$, où $\overline{z}$ est le complexe conjugué de z.

Montrer que s est un élément de $\mathscr{A}$ et construire l'ensemble $s(\Gamma)$, image de Γ par l'application s.

6. Soit f_t l'application de E dans lui-même qui, à tout point M du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$, fait correspondre le point M' de coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ définies par

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & x\text{e}^t \\ y' & = & y + t \end{array}\right.$$

où t est un réel quelconque.

a. Montrer que l'ensemble $\mathscr{G}$ des applications f_t est un sous-groupe commutatif de $\mathscr{A}$.

b. Étant donné un point M de coordonnées $(\alpha\,;\,\beta)$, on désigne par $C_{(\alpha\,;\,\beta)}$ l'ensemble des points $N = f_t(M)$, où t décrit $\mathbb{R}$.

Écrire une équation cartésienne de $C_{(\alpha\,;\,\beta)}$.

Construire les ensembles $C_{(-1\,;\,0)}$, $C_{(1\,;\,0)}$ et $C_{(0\,;\,1)}$.

c. On pose $f_t(\Gamma) = \Gamma_t$ pour $t \in \mathbb{R}^\star$.

Montrer que f_t est une conique dont on donnera une équation réduite et dont on calculera les coordonnées des sommets en fonction de t.

d. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles Γ_t est tangente à la droite d'équation $y = 0$.

Construire les coniques correspondantes.