Baccalauréat C Strasbourg juin 1978

EXERCICE 1 **4 POINTS**

n désigne un entier naturel.

1. Démontrer que n^2+5n+4 et n^2+3n+2 sont divisibles par $n+1$.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $3n^2+15n+19$ est divisible par $n+1$.
3. En déduire que, quel que soit n, $3n^2+15n+19$ n'est pas divisible par n^2+3n+2.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

e représente la base des logarithmes népériens,

1. Justifier l'existence de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ qu'on notera I,
2. Calculer I.
3. n étant un entier naturel non nul, on pose

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\mathrm{e}^{-\frac{k}{n}}=\frac{1}{n^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}+\cdots+\frac{k}{n^2}\mathrm{e}^{-\frac{k}{n}}+\cdots+\frac{n}{n^2}\mathrm{e}^{-\frac{n}{n}}.$$

   Montrer que $S(n)$ a une limite lorsqu'on fait tendre n vers $+\infty$. Préciser cette limite.

PROBLÈME **12 POINTS**

On désigne par :

E un espace vectoriel euclidien de base orthonormée $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

D la droite vectorielle de E de base $\left(\vec{V}\right)$ où $\vec{V}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k}$.

f l'endomorphisme de E tel que :

$$f\left(\vec{\imath}\right)=-2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k},\quad f\left(\vec{\jmath}\right)=-\vec{\imath}-2\vec{\jmath}-\vec{k},\quad f\left(\vec{k}\right)=\vec{\imath}-\vec{\jmath}-2\vec{k}.$$

On rappelle qu'un endomorphisme f de E est une application linéaire de E dans E. L'ensemble $f(\mathrm{E})$ s'appelle l'image de E par f (ou plus brièvement, l'image de f).

N.B. - La partie B est indépendante de A - II

Partie A

I

1. Exprimer les coordonnées de l'image par f d'un vecteur quelconque de E en fonction des coordonnées de ce vecteur.
2. Montrer que le noyau de f est D .
3. Montrer que l'image de f est le plan vectoriel orthogonal à D.
4. Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'image de f ; calculer $f\left(\vec{u}\right)$ en fonction de $\vec{u}$.
5. Montrer que f est la composée d'une homothétie vectorielle h et d'une projection vectorielle p que l'on précisera. Illustrer cette question par une figure.

II

$\mathscr{E}$ désigne un espace affine euclidien associé à E, O un point de $\mathscr{E}$ et φ l'application affine de $\mathscr{E}$ laissant O invariant et ayant f pour endomorphisme associé.
Soit S la sphère de centre O et de rayon 3, P le plan passant par O et orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{V}}$.

1. Déterminer l'ensemble Γ des points de S dont l'image par φ est S $\cap$ P.
2. Illustrer la question précédente par une figure.

Partie B

On désigne par ω l'application de E dans E telle que pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathrm{E}$, $\omega\left(\overrightarrow{u}\right) = 0$ et par G l'ensemble des endomorphismes g de E tels que $f \circ g = \omega$.
On précise que la multiplication par un réel α d'une application linéaire f de E dans E est définie par :

$$\forall \overrightarrow{u} \in \mathrm{E}, \quad (\alpha f)\left(\overrightarrow{u}\right) = \alpha \cdot f\left(\overrightarrow{u}\right).$$

1. Montrer que G, muni de l'addition des applications et de la multiplication d'une application par un réel, est un espace vectoriel.
2. **a.** Montrer que l'image de tout élément g de G est incluse dans le noyau de f.

   b. Établir que G est l'ensemble des endomorphismes g de E tels que pour chacun d'eux il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$g\left(\overrightarrow{\imath}\right) = \overrightarrow{\mathrm{V}}, \quad g\left(\overrightarrow{\jmath}\right) = \overrightarrow{\mathrm{V}}, \quad g\left(\overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{\mathrm{V}}$$

3. On considère les endomorphismes g_1, g_2 et g_3 de E tels que :

$$\begin{array}{lclclclclcl}
g_1\left(\overrightarrow{\imath}\right) & = & \overrightarrow{\mathrm{V}} & g_1\left(\overrightarrow{\jmath}\right) & = & \overrightarrow{0} & g_1\left(\overrightarrow{k}\right) & = & \overrightarrow{0}\\
g_2\left(\overrightarrow{\imath}\right) & = & \overrightarrow{0} & g_2\left(\overrightarrow{\jmath}\right) & = & \overrightarrow{\mathrm{V}} & g_2\left(\overrightarrow{k}\right) & = & \overrightarrow{0}\\
g_3\left(\overrightarrow{\imath}\right) & = & \overrightarrow{0} & g_3\left(\overrightarrow{\jmath}\right) & = & \overrightarrow{0} & g_3\left(\overrightarrow{k}\right) & = & \overrightarrow{\mathrm{V}}
\end{array}$$

   Montrer que $\left(g_1, g_2, g_3\right)$ est une base de G.
4. Soit g un endomorphisme distinct de ω appartenant à G.

   a. Montrer que l'image de g est égale au noyau de f.

   b. Établir que le noyau de g est un plan vectoriel dont on déterminera une équation cartésienne dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.