

Baccalauréat C Strasbourg juin 1979

EXERCICE 1

4 POINTS

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$z^2 - (2 + \sqrt{3}i)z - 2 + \sqrt{3}i = 0.$$

2. Soit P un plan affine euclidien orienté muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé direct. On considère l'application f de P dans P qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z} + \frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- a. Montrer que f est un antidéplacement. Montrer que $f = s_D \circ t_{\vec{\omega}}$ où s_D est la symétrie orthogonale par rapport à une droite D et $t_{\vec{\omega}}$ la translation de vecteur $\vec{\omega}$, ω appartenant à la direction de D ; déterminer D et ω .
- b. Soit C le cercle de centre Ω de coordonnées $(0; -\sqrt{3})$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et de rayon 1. Déterminer l'image par f de C .

EXERCICE 2

3 POINTS

Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ d'entiers naturels qui vérifient

$$\begin{cases} \delta & = & 60 \\ \mu & = & 3600 \end{cases}$$

ou δ désigne le pgcd de x et y et de y , μ leur ppcm.

PROBLÈME

13 POINTS

Soit P un plan affine euclidien muni d'un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.

Pour tout m réel, on note C_m l'ensemble des points M , dont les coordonnées $(x; y)$, strictement positives dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, vérifient la relation :

$$\log x \cdot \log y = m.$$

1. Montrer que pour tout m réel, C_m est non vide.
2. Définir analytiquement la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$. Montrer que pour tout m de \mathbb{R} , C_m est globalement invariant dans cette symétrie.
3. Déterminer C_0 .
4. a. Montrer que si m est non nul, C_m est la représentation graphique de la fonction $f_m : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto e^{\frac{m}{\log x}}$$
et vérifier que f_m est involutive.
- b. Étudier les limites de f_m aux bornes de son ensemble de définition.

c. Pour tout réel m non nul, on considère la fonction g_m définie par

$$\begin{array}{lcl} g_m : \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_m(x) \quad \text{pour } x \text{ élément de } \mathbb{R}_+^* - \{1\} \\ 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{array} .$$

Dresser dans chaque cas (m strictement positif et m strictement négatif) le tableau de variation de g_m

5. Étudier la limite de $\frac{e^{\frac{m}{\log x}} - 1}{\frac{m}{\log x}}$, quand x tend vers zéro par valeurs positives (m est un réel non nul).

Étudier la limite de $\frac{m}{\log x} e^{\frac{m}{\log x}}$, quand x tend vers 1, par valeurs inférieures pour m strictement positif, par valeurs supérieures pour m strictement négatif.

En déduire que :

$$\begin{array}{lcl} \text{pour } m > 0 & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} & \frac{g_m(x) - g_m(0)}{x} = -\infty \\ \text{pour } m < 0 & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} & \frac{g_m(x) - g_m(0)}{x} = +\infty \\ \text{pour } m > 0 & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} & \frac{g_m(x) - g_m(1)}{x - 1} = 0 \\ \text{pour } m < 0 & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} & \frac{g_m(x) - g_m(1)}{x - 1} = 0 \end{array} .$$

Donner des vecteurs directeurs des demi-tangentes à la courbe représentative de g_m aux points d'abscisse 0 et 1.

6. a. Représenter graphiquement C_1 , C_{-1} et C_0 sur une même figure.

Préciser les intersections de C_1 et de la droite d'équation $y = x$ et donner un vecteur directeur des tangentes en ces points,

b. Soit \mathcal{C} l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ vérifient la relation :

$$\log^2 |x| \cdot \log^2 |y| = 1.$$

Montrer que les droites d'équation $x = 0$ et $y = 0$ sont axes de symétrie de \mathcal{C} et que l'ensemble des points de \mathcal{C} , dont les deux coordonnées sont positives est égal à $C_1 \cup C_{-1}$. En déduire la représentation graphique de \mathcal{C} .

7. On considère le point mobile M_1 dont les coordonnées à tout instant t supérieur ou égal à 1 sont données dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ par :

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-t} \\ y_1(t) = e^{\frac{1}{t}} \end{cases}$$

a. Donner la trajectoire du mouvement et préciser le sens de parcours.

b. Préciser si le mouvement est uniforme, accéléré ou retardé sur l'intervalle de temps $[1; +\infty[$.

- c. On considère le point M_2 mobile sur C_1 qui à tout instant t a même abscisse que M_1 . Donner les coordonnées $(x_2(t); y_2(t))$ de M_2 à tout instant t supérieur ou égal à 1.
Donner la trajectoire de M_2 et préciser le sens de parcours.
On appelle $\vec{V}_1(t)$ la vitesse de M_1 à l'instant t et $\vec{V}_2(t)$ la vitesse de M_2 à l'instant t .
Comparer $\|\vec{V}_1(t)\|$ et $\|\vec{V}_2(t)\|$ à tout instant t .