∽ Baccalauréat C Strasbourg juin 1981 ∾

EXERCICE 1

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définir sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{3}\right]$ par

$$f(x) = x + \sqrt[3]{1-3x}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R}$.

1. Étudier les variations de f. Étudier l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
   (on ne recherchera pas d'asymptote).
   Préciser la demi-tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $\frac{1}{3}$.
   Tracer $(\mathscr{C})$.
2. Soit $\mathscr{D}$ le domaine limité par $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations respectives
   $x = 0$, $x = \frac{1}{3}$, $y = x$. Calculer l'aire de $\mathscr{D}$.

EXERCICE 2

Un sac contient 9 jetons numérotés de 1 à 9 indiscernables au toucher.

1. On tire au hasard simultanément trois jetons du sac (on se place donc dans l'hypothèse d'équiprobabilité).
   On appelle X la variable aléatoire indiquant le nombre de numéros impairs figurant parmi les trois numéros d'un tirage.
   a. Donner la loi de probabilité de X. Calculer son espérance mathématique et sa variance.
   b. Quelle est la probabilité pour que la somme des 3 numéros d'un tirage soit paire ?
2. On répéte dix fois le tirage décrit au 1. en remettant les jetons dans le sac après chaque tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement quatre fois une somme paire au cours de ces dix tirages successifs ?

PROBLÈME

Partie A

Soit E_3 un espace vectoriel euclidien de base orthonormée $B = \left(\vec{\imath}\,,\ \vec{\imath}\,,\ \vec{k}\right)$.

1. On considère les droites vectorielles Δ_1, Δ_2, Δ_3 de bases respectives $\vec{\imath} - \vec{\jmath}$,
   $\vec{\imath} - \vec{k}$, $\vec{k} - \vec{\imath}$.
   a. Montrer que Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont contenues dans un même plan vectoriel π dont on donnera une équation cartésienne.
   b. Soit π_1, π_2, π_3 les plans vectoriels orthogonaux respectivement à Δ_1, Δ_2, Δ_3.
   Donner une équation cartésienne de chacun de ces plans.

2. Soit s_1, s_2, s_3 les endomorphismes de E_3 définis par

$$s_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & y \\ y' & = & z \\ z' & = & z \end{array}\right. \quad s_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x \\ y' & = & z \\ z' & = & y \end{array}\right. \quad s_3 : \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & z \\ y' & = & y \\ z' & = & x \end{array}\right.$$

où $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ sont les coordonnées d'un vecteur dans la base B et $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ celles de son image.

a. Vérifier que s_1, s_2, s_3 sont des isométries vectorielles et donner leurs éléments caractéristiques.

b. Montrer qu'en composant ces endomorphismes deux à deux on obtient l'une ou l'autre de deux rotations φ_1 et φ_2 de même axe Δ orthogonal à π. (On posera $\varphi_1 = s_2 \circ s_3$).

3. Soit $\overrightarrow{I} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}\right)$, $\overrightarrow{J} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} - 2\overrightarrow{k}\right)$.

a. Vérifier que $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$ est une base orthonormée de π.

b. Déterminer la matrice dans la base $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$ de la restriction de φ_1 à π. Donner la mesure de l'angle de cette restriction, le plan π étant orienté par $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$.

En déduire la mesure de l'angle de la restriction de la rotation φ_2 à π.

4. Soit $H = \left\{\text{Id}, s_1, s_2, s_3, \varphi_1, \varphi_1\right\}$ où Id est l'application identique de E_3.

On munit H de la loi de composition des applications notée $\circ$. $(H, \circ)$ est-il un groupe ?

5. Pour $i = 1$ ou 2 et $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$\left(\varphi_i\right)^n = \underbrace{\varphi_i \circ \varphi_i \circ \cdots \circ \varphi_i}_{n\text{fois}}.$$

Déterminer $\left(\varphi_1\right)^n$ et $\left(\varphi_2\right)^n$.

Partie B

Soit $\mathcal{E}_3$ un espace affine euclidien associé à E_3 et O un point de $\mathcal{E}_3$. On munit $\mathcal{E}_3$ du repère $\mathcal{R} = \left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.

On appelle d la distance euclidienne de $\mathcal{E}_3$ et $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u} = \alpha\left(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Soit a un réel strictement positif et A, B, C les points de coordonnées respectives dans le repère $\mathcal{R}$: $(a\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $(0\ ;\ a\ ;\ 0)$, $(0\ ;\ 0\ ;\ a)$. On pose $\text{A}' = t_{\overrightarrow{u}}(\text{A})$, $\text{B}' = t_{\overrightarrow{u}}(\text{B})$, $\text{C}' = t_{\overrightarrow{u}}(\text{C})$.

Quelle est la nature du triangle ABC ? En déduire celle du triangle A′B′C′.

2. Soit P_1, P_2, P_3 les trois plans définis par

$$\begin{array}{lcl} \text{P}_1 & = & \left\{M \in \mathcal{E}_3 / d\left(M, \text{A}'\right) = d\left(M, \text{B}'\right)\right\} \\ \text{P}_2 & = & \left\{M \in \mathcal{E}_3 / d\left(M, \text{B}'\right) = d\left(M, \text{C}'\right)\right\} \\ \text{P}_3 & = & \left\{M \in \mathcal{E}_3 / d\left(M, \text{C}'\right) = d\left(M, \text{A}'\right)\right\} \end{array}$$

Montrer qu'ils ne dépendent pas du choix de α. Donner une explication géométrique.

Déterminer l'ensemble D des points équidistants de A′, B′ et C.

3. Montrer qu'il existe un déplacement f unique tel que

$$f(\text{A}) = \text{B}'; \quad f(\text{B}) = \text{C}'; \quad f(\text{C}) = \text{A}'.$$

En donner les éléments caractéristiques.