Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1982 Strasbourg

EXERCICE 1 **4 points**

1. On appelle diviseur strict d'un entier naturel tout diviseur autre que le nombre lui-même.
Déterminer les entiers naturels diviseurs stricts de 220.
2. On appelle nombres amiables deux entiers naturels tels que chacun d'eux soit égal à la somme des entiers naturels diviseurs stricts de l'autre. Vérifier que 220 et 284 sont amiables.
3. **a.** On appelle nombre parfait un nombre égal à la somme de ses diviseurs stricts (amiable avec lui-même). Le nombre 28 est-il parfait ?
Déterminer un entier p premier tel que le nombre $24p$ soit parfait.
b. Plus généralement, soit n et p deux entiers naturels, p premier ; quelle doit être l'expression nécessaire de p en fonction de n pour que $2^n \cdot p$ soit parfait ? Donner la liste des nombres parfaits de cette forme pour $n < 10$.

EXERCICE 2 **4 points**

Fonction scalaire de Leibniz

Dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$, on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que $\left\|\overrightarrow{\text{AB}}\right\| = a$ (a est un réel strictement positif donné).

1. Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés (A, 2), (B, 1) et (C, 1).
2. Pour tout point M du plan $\mathscr{P}$, on pose

$$\overrightarrow{v} = -2\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}.$$

Démontrer que $\overrightarrow{v}$ est un vecteur constant, indépendant de M.
Construire le point A′ tel que $\overrightarrow{\text{A}'N} = \overrightarrow{v}$. Calculer $\left\|\overrightarrow{\text{A}'N}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{\text{AG}}\right\|$ en fonction de a.
3. Déterminer et construire l'ensemble (γ) des points du plan $\mathscr{P}$ tels que

$$\left\|2\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = \left\|-2\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\|.$$

4. Déterminer et construire l'ensemble (ϵ) des points du plan $\mathscr{P}$ tels que

$$-2M\text{A}^2 + M\text{B}^2 + M\text{C}^2 = a^2.$$

(On pourra remarquer que le point G appartient à (ϵ).)

PROBLÈME **12 points**

Dans l'espace vectoriel $\mathscr{F}$ de toutes les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$, on considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des fonctions f définies par

$$\exists (a,\, b,\, c,\, d) \in \mathbb{R}^4, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$f(x) = \text{e}^{-x}(a\cos x + b\sin x + cx\cos x + dx\sin x).$$

Partie A

1. Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$. On pourra utiliser les valeurs de ces fonctions en 0, $\dfrac{\pi}{2}$, π, $\dfrac{3\pi}{2}$.

2. Soit les quatre fonctions de $\mathscr{E}$ suivantes :

$$\begin{array}{llll} f_1 : & x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\cos x ; & f_2 : & x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x}\cos x ;\\ f_3 : & x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\sin x ; & f_4 : & x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x}\sin x .\end{array}$$

Montrer que $\left(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4\right)$ est un système libre de $\mathscr{E}$.
En déduire que $\mathrm{B} = \left(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4\right)$ est une base de $\mathscr{E}$.

3. **a.** Calculer les dérivées f_1', f_2', f_3', f_4' de f_1, f_2, f_3, f_4 et montrer qu'elles appartiennent à $\mathscr{E}$; en déduire que

$$\begin{array}{llll} \mathrm{D} : & \mathscr{E} & \to & \mathscr{E}\\ & f & \longmapsto & \mathrm{D}(f) = f' \end{array}$$

est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

b. Si une fonction f de $\mathscr{E}$ a pour composantes $(a,\, b,\, c,\, d)$ dans la base B, quelles sont les composantes de $\mathrm{D}(f)$ dans B ?

c. Déterminer le noyau de D. En déduire que D est un automorphisme de $\mathscr{E}$.
Définir analytiquement l'application réciproque D^{-1} de D.
Si f est élément de $\mathscr{E}$, que représente $\mathrm{D}^{-1}(f)$?

Partie B

Soit la fonction f de $\mathscr{E}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x + \sin x + 2x\sin x).$$

1. Étudier les variations de cette fonction sur $[0, ; \pi]$ et tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal. On prendra pour unités :
sur Ox, π est représenté par 12 cm ;
sur Oy l'unité est 4 cm.

2. On désigne par g la restriction de f à $\mathrm{I} = \left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right]$. Déterminer $\mathrm{J} = g(\mathrm{I})$. En déduire que g est une bijection de I sur J.
Soit $g^{-1} : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ la bijection réciproque de g. Quel est le domaine de dérivabilité de g^{-1} ? Représenter graphiquement g et g^{-1} dans un même repère orthonormé (unité : 4 cm).

3. **a.** Montrer que l'équation $\left\{\begin{array}{l} f(x) = 0\\ x \in [0 ; \pi]\end{array}\right.$ admet une unique solution x_0. Vérifier que x_0 appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{5\pi}{6} ; \pi\right[$.

b. Calculer pour tout élément k de $\mathbb{Z}$, $f(2k\pi)$, $f(\pi + 2k\pi)$, $f(2\pi + 2k\pi)$.
Montrer que sur l'intervalle $]2k\pi ; 2k\pi + 2\pi[$, la fonction f admet exactement un maximum et un minimum qui sont de signes contraires.

c. Déduire du résultat précédent que pour tout élément k de $\mathbb{Z}$, l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $]k\pi ; k\pi + \pi[$ une solution unique.
Quelques valeurs : $\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}} \approx 0,46$; $\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0,20$; $\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}} \approx 0,09$;
$\mathrm{e}^{-\pi} \approx 0,04$.