

## ∞ Baccalauréat C Strasbourg juin 1983 ∞

### EXERCICE 1

4 POINTS

Le symbole  $\text{Log}$  désigne le logarithme népérien.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \text{Log}|x+1|.$$

1. Étudier la fonction  $f$  et tracer sa courbe représentative dans un plan affine euclidien  $E$  muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
2. On considère la fonction  $F$  définie sur  $]1; +\infty[$  par :

$$F(x) = \int_3^x f(t) dt.$$

Déterminer le sens de variation de la fonction  $F$ .

3. Soit  $\Delta$  l'ensemble des points  $M$  de  $E$ , de coordonnées  $(x; y)$  vérifiant :  
 $3 \leq x \leq 5; 0 \leq y \leq f(x)$ .  
Calculer l'aire de  $\Delta$ .

### EXERCICE 2

3 POINTS

### PROBLÈME

13 POINTS

#### Partie A

1. Dans un plan affine  $\Pi$  rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère l'application  $f$  qui au point  $M$  de coordonnées  $(x; y)$  associe le point  $M'$  de coordonnées  $(x; -y)$ .  
Reconnaitre cette application et vérifier qu'elle laisse invariante la courbe  $\mathcal{P}$  d'équation :  $y^2 = -x + \frac{1}{4}$ .
2. À chaque réel  $a$ , on associe l'application affine  $f_a$  de  $\Pi$  dans  $\Pi$ , qui à tout point  $M$  de coordonnées  $(x; y)$  associe le point  $M'$  de coordonnées  $(x'; y')$  tel que

$$\begin{cases} x' &= x + 4ay - 4a^2 \\ y' &= 2a - y \end{cases}$$

Donner la nature de  $f_a$  et ses éléments caractéristiques. Vérifier que, pour tout  $a$  réel, la courbe  $\mathcal{P}$  est invariante par  $f_a$ .

3. On appelle  $F$  l'ensemble de toutes les applications  $f_a$  lorsque  $a$  décrit  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $F$ , muni de la loi de composition des applications, n'est pas un groupe. Montrer que pour tout triplet  $(a, b, c)$  de  $\mathbb{R}^3$ ,  $f_c \circ f_b \circ f_a$  appartient à  $F$ .

En déduire que pour tout couple  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$ , il existe un réel  $m$  tel que :

$$f_b \circ f_a = f \circ f_m = f_{-m} \circ f.$$

4. On désigne par  $G$  l'ensemble de toutes les applications de la forme  $f \circ f_m$  lorsque  $m$  décrit  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $F \cup G$ , muni de la loi de composition des applications est un groupe non commutatif.

5. On définit le point  $\Omega$  et le vecteur  $\vec{J}$  de la façon suivante

$$\overrightarrow{O\Omega} = \left(-a^2 + \frac{1}{4}\right)\vec{i} + a\vec{j}; \vec{J} = -2a\vec{i} + \vec{j}.$$

- Vérifier que  $\vec{J}$  est un vecteur directeur de la tangente en  $\Omega$  à  $\mathcal{P}$ .
- Vérifier que pour tout  $M$  de  $\mathcal{P}$ , les vecteurs  $\overrightarrow{Mf_a(M)}$  et  $\vec{J}$  sont liés.
- On suppose la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  orthonormée, on choisit  $a$  égal à 1. Dessiner  $\mathcal{P}$ , placer le point  $\Omega$  et le vecteur  $\vec{J}$ . Indiquer comment construire l'image  $f_a(M)$  d'un point  $M$  de  $\mathcal{P}$ .

### Partie B

Dans cette partie, le plan affine  $\Pi$  est supposé euclidien et le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  de  $\pi$  orthonormé. On désigne par  $\mathcal{U}$  l'ensemble des nombres complexes de module 1, et par  $\mathcal{U}^*$  l'ensemble  $\mathcal{U}$  privé du réel 1.

- Soit  $u$  un élément de  $\mathcal{U}^*$ ; on pose  $u = \cos\theta + i\sin\theta$  avec  $\theta \in ]0; 2\pi[$ .  
Déterminer le module et un argument de  $1 - u$  en fonction de  $\theta$ . En déduire le module et un argument de  $\frac{1}{1-u}$  et  $\frac{1}{(1-u)^2}$ .
- Montrer que :
  - l'ensemble des points  $M$  de  $\Pi$  d'affixe  $z = 1 - u$  où  $u$  décrit  $\mathcal{U}^*$  est le cercle de centre A d'affixe 1, et passant par O;
  - l'ensemble des points  $M$  de  $\Pi$  d'affixe  $z = \frac{1}{1-u}$  où  $u$  décrit  $\mathcal{U}^*$  est la médiatrice D de [OA];
  - l'ensemble des points  $M$  de  $\Pi$  d'affixe  $z = \frac{1}{(1-u)^2}$  où  $u$  décrit  $\mathcal{U}^*$  est la parabole de foyer O et de directrice D.
- Soit B le point d'affixe  $b(b \neq 0)$ ,  $M$  le point d'affixe  $z$ ; interpréter le module de  $z - b$ .
  - Quel est l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z = b(1 - u)$ ,  $u$  décrivant  $\mathcal{U}$ ?
  - Quel est l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z = -1b$ ,  $u$  décrivant  $\mathcal{U}$ ?