

Durée : 4 heures

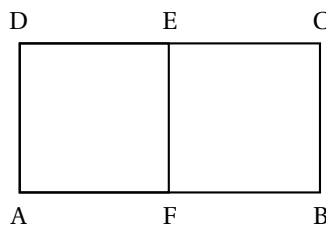
∞ Baccalauréat C Strasbourg septembre 1985¹ ∞

EXERCICE 1

4 points

Sur la figure ci-dessous dans le plan orienté, AFED est un carré de côté 1 tel que l'angle $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}\right)$ ait pour mesure $\frac{\pi}{2}$.
Soit ℓ ($\ell > 1$) la longueur du segment [AB] (du rectangle ABCD).

1. On suppose qu'il existe une similitude directe f transformant respectivement A, B, C, D en B, C, E, F.



Établir qu'alors $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. (On suppose dans toute la suite que ℓ a cette valeur.)

2. Quels sont l'angle et le rapport de la similitude f ?
Montrer que le centre de la similitude f est le point d'intersection des droites (AC) et (EB); on pourra utiliser $f \circ f$.
3. À tout point M d'affixe complexe z dans le repère $(A; \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$ on fait correspondre le point $g(M)$ d'affixe :

$$z' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}iz + \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Montrer que g est une similitude dont on donnera le centre, l'angle, le rapport. Quelles sont les images par g de A, B, C, D?

EXERCICE 2

5 points

Dans le plan \mathcal{P} rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les deux cercles (C) et (C') de même centre O et de rayons respectifs R et R' ($R > R'$).

Soit D la demi-droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$ (φ réel quelconque) et soit D' la demi-droite image de D dans la symétrie orthogonale par rapport à (O, \vec{i}) ; D coupe (C) en M et D' coupe (C') en M'.

- Calculer les coordonnées de M et M' en fonction de R, R' et φ .
- Quel est l'ensemble (E) des points P milieux des segments [MM'] lorsque φ varie?
- Montrer que la tangente en P à (E) est orthogonale à (MM').
- Quelle relation doivent vérifier R et R' pour que la courbe (E) soit tangente au cercle (C')?

1. Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Reims

2. Dans cette question on prend $R = 6$ cm et $R' = 2$ cm.
- Faire une figure soignée de (E), (C), (C').
 - Trouver une affinité orthogonale f d'axe (O, \vec{j}) et de rapport positif telle que (E) soit l'image de (C') par f .
On désigne par f^{-1} l'affinité réciproque de f et par r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Soit P' l'image de P par $f \circ r \circ f^{-1}$.
Démontrer que P' appartient à (E) et que

$$OP^2 + OP'^2 = 20.$$

PROBLÈME**11 points****Les parties A, B, C sont largement indépendantes****Partie A**

On se propose de déterminer les fonctions deux fois dérivables sur \mathbb{R} , solutions de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2.$$

- Déterminer une fonction polynôme du second degré g , solution de (E).
- Démontrer que φ est solution de (E) si, et seulement si, $\varphi - g$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E') \quad y'' + 2y' + y = 0.$$

- Résoudre (E'). En déduire l'ensemble des fonctions φ solutions de (E). Déterminer celle de ces solutions dont la représentation graphique dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ passe par O et admet comme tangente en O la droite (O, \vec{i}) .

Partie B

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^2 - 2x + 2xe^{-x}.$$

- Étudier le sens de variation de f et les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
- Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).
On considère la courbe (\mathcal{C}) représentative de f et la courbe (\mathcal{P}) représentative de la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = x^2 - 2x.$$

- Étudier les positions relatives de (\mathcal{C}) et (\mathcal{P}) et préciser leur intersection.
- Vérifier que (\mathcal{P}) et (\mathcal{C}) sont deux courbes asymptotes quand x tend vers $+\infty$.
- Construire les courbes (\mathcal{P}) et (\mathcal{C}) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- d. Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan délimitée par les courbes (\mathcal{C}) , (\mathcal{P}) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$. (λ réel strictement positif). Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Partie C

1. On se propose d'étudier dans cette question l'équation $f(x) = x$.
- a. Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$h(x) = x - 3 + 2e^{-x}.$$

Étudier ses variations (on ne demande pas sa représentation graphique) et en déduire que l'équation $h(x) = 0$ a deux solutions, l'une positive α , l'autre négative β ; à l'aide de la calculatrice donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

- b. Quelles sont les solutions de l'équation $f(x) = x$?
2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 = 3$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 3$.

Quel est le sens de variation de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Cette suite est-elle convergente?