Durée : 4 heures

Baccalauréat C Métropole groupe III juin 1987 [1]

EXERCICE 1 **4 points**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$, on donne les points $\text{A}\left(-\dfrac{1}{2}~;~0~;~0\right)$, $\text{B}\left(\dfrac{1}{2}~;~0~;~0\right)$ et F(0; 1; 0).

1. Soit $M(x~;~y~;~z)$ un point de l'espace. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{M\text{A}} \wedge \overrightarrow{M\text{B}}$.
   Déterminer le point M_0 tel que $\overrightarrow{M_0\text{A}} \wedge \overrightarrow{M_0\text{B}} = \overrightarrow{M_0\text{F}}$
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan $\left(\text{O},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$ tels que

   $$\left\|\overrightarrow{M\text{A}} \wedge \overrightarrow{M\text{B}}\right\| = \left\|\overrightarrow{M\text{F}}\right\|.$$

   En interprétant $\left\|\overrightarrow{M\text{A}} \wedge \overrightarrow{M\text{B}}\right\|$ comme une aire, montrer que ces points M sont à égale distance du point F et de la droite (AB). En déduire une solution géométrique.
3. Résoudre les mêmes questions qu'en 2. en remplaçant le plan $\left(\text{O},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$ par le plan $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

EXERCICE 2 **4 points**

On pose

$$\text{I}_0 = \int_0^{\text{e}} x\,\text{d}x.$$

$$\text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}^{\star},~ I_n = \int_1^{\text{e}} x(\ln x)^n\,\text{d}x.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^{\star}$, établir la relation $2I_n + nI_{n-1} = \text{e}^2$. Calculer I_2.
3. Montrer que la suite de terme général I_n est décroissante.
   En déduire, en utilisant la relation de récurrence du 2., l'encadrement

   $$\frac{\text{e}^2}{n+3} \leqslant I_n \leqslant \frac{\text{e}^2}{n+2}.$$

   Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n$.

1. Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon
Nancy–Metz, Reims, Strasbourg

PROBLÈME **12 points**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$on considère les points A, B, M, N et Q d'affixes respectives 1, -1, z, z^2, $\dfrac{1}{z}$, où z est un nombre complexe non nul. On rappelle que si M a pour affixe z, l'argument de z, noté arg z est une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OA}M}\right)$.

Question préliminaire : pour $z \neq 0$, calculer en fonction de z l'affixe de l'isobarycentre G des points : M, N et Q.

La partie A *est l'étude de la fonction ainsi obtenue dans le champ réel ; l'objet de la partie B est la construction du lieu de l'isobarycentre G lorsque le point M décrit le cercle trigonométrique. Les parties* A *et* B *peuvent être résolues indépendamment l'une de l'autre.*

Partie A

On considère les fonctions numériques d'une variable réelle définies par

$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right)$$

et

$$x \longmapsto g(x) = 2x^3 + x^2 - 1.$$

1. Montrer que pour tout $x \neq 0$, les nombres $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
2. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α, avec $0 < \alpha < 1$. (On ne cherchera pas à calculer α.)
3. Dresser le tableau des variations de la fonction f. On désigne par $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé (unité 3 cm), par I le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse -1 et par J le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse $+1$.
4. **a.** Vérifier que la droite (IJ) est la tangente en J à $(\mathscr{C})$.

   b. Déterminer une équation de la tangente (T) en I à $(\mathscr{C})$.
5. Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (T).
6. Utiliser les résultats précédents pour construire la courbe $(\mathscr{C})$. (On prendra $2/3$ comme valeur approchée de α.)

Partie B

Dans cette partie, on reprend les notations du début du problème avec $z = \text{e}^{\text{i}t}$ et $t \in \mathbb{R}$. Les figures seront tracées dans le repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ en prenant pour unité 9 cm.

1. Soit S le point d'affixe $Z = z^2 + z + \dfrac{1}{z}$. Montrer que les points B, M et S sont alignés.
2. Calculer en fonction de t l'affixe de l'isobarycentre de M, N et Q. On en précisera la partie réelle et la partie imaginaire.

3. Dans le repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$, on considère le point G_t de coordonnées $(x(t)~;~y(t))$ où

$$x(t) = -(\cos 2t + 2\cos t), \quad y(t) = -\sin 2t.$$

Pour tout t réel, comparer $G_{t+2\pi}$ et G_t, puis G_{-t} et G_t.

4. Étudier les variations des fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ sur l'intervalle $[0~;~\pi]$.

5. Tracer la courbe (Γ), ensemble des points G_t pour $t \in [0~;~\pi]$. En particulier, on aura soin de préciser les points de contact des tangentes parallèles à l'un des axes de coordonnées. (On rappelle que l'unité est 9 cm.)

6. On considère le cercle centré à l'origine et de rayon $\dfrac{1}{3}$.

Pour $t \in [0~;~\pi]$, soit M'_t le point d'intersection, autre que G_π, de ce cercle et de la droite (G_tG_π). Utiliser la question B 1. pour donner une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{O}G_0},~\overrightarrow{\text{O}M'_t}\right)$.

7. Compléter la courbe (Γ) pour obtenir le lieu géométrique de l'isobarycentre des points M, N et Q lorsque M décrit le cercle trigonométrique.