Durée : 4 heures

Baccalauréat C Strasbourg juin 1986

EXERCICE 1 **4 points**

1. Déterminer la solution de l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + y = 0$$

vérifiant : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
Étudier les variations de cette fonction, et en tracer la courbe représentative (sur papier ordinaire) dans un repère orthonormé du plan .(unité : 2 cm).

2. Pour n entier naturel, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = xe^{-2^n x}.$$

Comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(2x)$.
On désigne par C_n la courbe représentative de f_n (dans le même repère).
Par quelle transformation simple passe-t'on de C_n à C_{n+1} ?

3. Calculer $A_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2^n}} f_0(x)\,\mathrm{d}x$.

On pose plus généralement $A_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2^n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
Comparer A_n et A_{n+1}. Quelle est la nature de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

EXERCICE 2 **4 points**

On considère dans un plan $\mathscr{P}$ un triangle ABC non aplati. B$'$ désigne le milieu de [AC], C$'$ le milieu de [AB] et D$'$ le barycentre du système $\{(\text{A}, 3), (\text{B}, 2)\}$.
Soit I le barycentre du système $\{(\text{A}, 2), (\text{B}, 2), (\text{A}, 1), (\text{C}, 1)\}$.

1. Montrer que I est le barycentre du système $\{(\text{B}', 1), (\text{C}', 2)\}$ et également du système $\{(\text{D}, 5), (\text{C}, 1)\}$.
En déduire que 1 est le point d'intersection des droites (B$'$C$'$) et (CD).
2. La droite (AI) coupe la droite (BC) en E.
Déterminer la position de E sur la droite (BC). (On pourra utiliser le fait que I est le barycentre du système $\{(\text{B}', 1), (\text{C}, 2)\}$.)
3. B et C restent fixes. Le point A se déplace dans $\mathscr{P}$, le segment [AE] où E est le point défini dans la question 2, conservant une longueur constante.
Déterminer les lieux géométriques des points I et D. (On pourra faire intervenir des homothéties).

EXERCICE 3 **12 points**

Partie A : préliminaires

Factoriser, dans $\mathbb{R}$, le polynôme $2x^2 - x\sqrt{2} - 1$, et étudier, sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$, le signe de l'expression :

$$f(\theta) = 2\cos^2\theta - \sqrt{2}\cos\theta - 1;$$

on introduira dans cette étude l'unique réel $\theta \in]0\,;\,\pi[$ tel que : $\cos\theta_0 = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}$. (Pour la suite du problème, on considèrera que θ_0 radians correspondent approximativement à 116 degrés).

Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, (unité : 1 cm) ; on considère. le point A d'affixe -4 et le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon $4\sqrt{2}$.

Objet du problème : À tout réel θ on associe le point $P(\theta) \in \mathscr{C}$ tel que θ soit une mesure en radians de l'angle $\left(\widehat{\vec{\imath}\,,\,\overrightarrow{\text{A}P(\theta)}}\right)$.
Soit $T(\theta)$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point $P(\theta)$; on appelle $M(\theta)$ le projeté orthogonal de O sur $T(\theta)$.
On se propose d'étudier le lieu $\mathscr{L}$ des points $M(\theta)$ obtenus lorsque θ décrit $\mathbb{R}$.

1. **a.** Représenter graphiquement sur papier millimétré, avec le plus grand soin, les points $P(\theta)$ et $M(\theta)$ obtenus pour

$$\theta \in \left\{0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \theta_0.\right\}$$

On disposera ainsi des premiers éléments d'une figure destinée, sous le nom de « figure 1 », à être complétée aux questions 2. c, 2. d et 3.

b. Démontrer que la droite (OA) est un axe de symétrie de $\mathscr{L}$.

c. θ étant quelconque, on note $\overrightarrow{u(\theta)}$ le vecteur unitaire tel que : $\left(\widehat{\vec{\imath}\,,\,\overrightarrow{u(\theta)}}\right) = 0$, et $H(\theta)$ le projeté orthogonal de O sur la droite $(\text{A}P(\theta))$.
Représenter O, A, $\mathscr{C}$, $P(\theta)$, $T(\theta)$, $M(\theta)$, $u(\theta)$, $H(\theta)$ sur une nouvelle figure « figure 2 ») devant être complétée à la question 4. b.
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{\text{A}P(\theta)}$ et $\overrightarrow{\text{A}H(\theta)}$ au moyen du vecteur $\overrightarrow{u(\theta)}$; en déduire que les coordonnées $(x(\theta), y(\theta))$ du point $M(\theta)$ sont données par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(\theta) & = & 4\left(\sqrt{2}-\cos\theta\right)\cos\theta \\ y(\theta) & = & 4\left(\sqrt{2}-\cos\theta\right)\sin\theta. \end{array}\right.$$

d. Démontrer que l'affixe $m(\theta)$ du point $M(\theta)$ est donnée par

$$m(\theta) = 4\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\theta} - 2\text{e}^{2\text{i}\theta} - 2 \quad (\text{i} \in \mathbb{C}\,;\, \text{i}^2 = -1).$$

e. De même, démontrer que l'affixe $h(\theta)$ du point $H(\theta)$ est donnée par :

$$h(\theta) = -2 + \text{e}^{2\text{i}\theta}.$$

2. Construction de $\mathscr{L}$:

a. Expliquer pourquoi on peut, dans un premier temps, se limiter au cas où : $\theta \in [0\,;\,\pi]$.

b. Étudier les variations, sur $[0\,;\,\pi]$, des fonctions $\theta \longmapsto x(\theta)$ et $\theta \longmapsto y(\theta)$.
(On établira en particulier que : $y'(\theta) = -4f(\theta)$, avec les notations de la partie A).

c. Représenter sur la figure 1 les tangentes à $\mathscr{L}$ aux points $M(0)$, $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $M(\theta_0)$, $M(\pi)$, $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$. (On rappelle que la tangente à $\mathscr{L}$ au point $M(\theta)$ est dirigée par le vecteur de coordonnées $(x'(\theta),\ y'(\theta))$, noté $\dfrac{\overrightarrow{\text{d}M}}{\text{d}\theta}(\theta)$, si ce vecteur n'est pas nul).

d. Achever le tracé de $\mathscr{L}$, en se conformant aux résultats précédents.

3. *Construction de la tangente en un point quelconque de $\mathscr{L}$*

Démontrer que l'affixe du vecteur $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)$ s'obtient en multipliant par i l'affixe du vecteur $\overrightarrow{H(\theta)M(\theta)}$.

Interpréter géométriquement, et en déduire une construction pratique de la tangente à $\mathscr{L}$ en n'importe quel point; illustrer ce résultat (sur la figure 1) dans le cas particulier où : $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

4. **a.** Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, calculer l'affixe $m(\theta+\pi)$ du point $M(\theta+\pi)$, et démontrer que l'affixe du milieu $L(\theta)$ du segment $[M(\theta)M(\theta+\pi)]$ est donnée par : $l(\theta) = -2\left(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\right)$.

b. Démontrer que le lieu du point $L(\theta)$, lorsque θ décrit $\mathbb{R}$, est le cercle Γ de diamètre [OA].
Illustrer ce résultat, sur la figure 2.

c. Démontrer que $H(\theta)$ est le point de Γ diamétralement opposé à $L(\theta)$.