

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Strasbourg¹ juin 1986 ∞

EXERCICE 1

4 points

1. Déterminer la solution de l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + y = 0$$

vérifiant : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Étudier les variations de cette fonction, et en tracer la courbe représentative (sur papier ordinaire) dans un repère orthonormé du plan (unité : 2 cm).

2. Pour n entier naturel, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = xe^{-2^n x}.$$

Comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(2x)$.

n désigne par C_n la courbe représentative de f_n (dans le même repère).

Par quelle transformation simple passe-t'on de C_n à C_{n+1} ?

3. Calculer $A_0 = \int_0^{\frac{1}{2^n}} f_0(x) dx$.

On pose plus généralement $A_n = \int_0^{\frac{1}{2^n}} f_n(x) dx$.

Comparer A_n et A_{n+1} . Quelle est la nature de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

EXERCICE 2

4 points

On considère dans un plan \mathcal{P} un triangle ABC non aplati. B' désigne le milieu de [AC], C' le milieu de [AB] et D' le barycentre du système $\{(A, 3), (B, 2)\}$.

Soit I le barycentre du système $\{(A, 2), (B, 2), (A, 1), (C, 1)\}$.

1. Montrer que I est le barycentre du système $\{(B', 1), (C', 2)\}$ et également du système $\{(D, 5), (C, 1)\}$.

En déduire que I est le point d'intersection des droites $(B'C')$ et (CD) .

2. La droite (AI) coupe la droite (BC) en E.

Déterminer la position de E sur la droite (BC). (On pourra utiliser le fait que I est le barycentre du système $\{(B', 1), (C, 2)\}$.)

3. B et C restent fixes. Le point A se déplace dans \mathcal{P} , le segment [AE] où E est le point défini dans la question 2, conservant une longueur constante.

Déterminer les lieux géométriques des points I et D. (On pourra faire intervenir des homothéties).

EXERCICE 3

12 points

Partie A : préliminaires

Factoriser, dans \mathbb{R} , le polynôme $2x^2 - x\sqrt{2} - 1$, et étudier, sur l'intervalle $[0; \pi]$, le signe de l'expression :

$$f(\theta) = 2 \cos^2 \theta - \sqrt{2} \cos \theta - 1;$$

on introduira dans cette étude l'unique réel $\theta \in]0; \pi[$ tel que : $\cos \theta_0 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{10}}{4}$. (Pour la suite du problème, on considèrera que θ_0 radians correspondent approximativement à 116 degrés).

Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (unité : 1 cm); on considère le point A d'affixe -4 et le cercle \mathcal{C} de centre A et de rayon $4\sqrt{2}$.

Objet du problème : À tout réel θ on associe le point $P(\theta) \in \mathcal{C}$ tel que θ soit une mesure en radians de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{AP(\theta)})$.

Soit $T(\theta)$ la tangente à \mathcal{C} au point $P(\theta)$; on appelle $M(\theta)$ le projeté orthogonal de O sur $T(\theta)$. On se propose d'étudier le lieu \mathcal{L} des points $M(\theta)$ obtenus lorsque θ décrit \mathbb{R} .

1. a. Représenter graphiquement sur papier millimétré, avec le plus grand soin, les points $P(\theta)$ et $M(\theta)$ obtenus pour

$$\theta \in \left\{ 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \theta_0 \right\}$$

On disposera ainsi des premiers éléments d'une figure destinée, sous le nom de « figure 1 », à être complétée aux questions 2. c, 2. d et 3.

- b. Démontrer que la droite (OA) est un axe de symétrie de \mathcal{L} .

- c. θ étant quelconque, on note $\overrightarrow{u(\theta)}$ le vecteur unitaire tel que : $(\vec{i}, \overrightarrow{u(\theta)}) = 0$, et $H(\theta)$ le projeté orthogonal de O sur la droite $(AP(\theta))$.

Représenter O, A, \mathcal{C} , $P(\theta)$, $T(\theta)$, $M(\theta)$, $u(\theta)$, $H(\theta)$ sur une nouvelle figure « figure 2 » devant être complétée à la question 4. b.

Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AP(\theta)}$ et $\overrightarrow{AH(\theta)}$ au moyen du vecteur $\overrightarrow{u(\theta)}$; en déduire que les coordonnées $(x(\theta), y(\theta))$ du point $M(\theta)$ sont données par :

$$\begin{cases} x(\theta) &= 4(\sqrt{2} - \cos \theta) \cos \theta \\ y(\theta) &= 4(\sqrt{2} - \cos \theta) \sin \theta. \end{cases}$$

- d. Démontrer que l'affixe $m(\theta)$ du point $M(\theta)$ est donnée par

$$m(\theta) = 4\sqrt{2}e^{i\theta} - 2e^{2i\theta} - 2 \quad (i \in \mathbb{C}; i^2 = -1).$$

e. De même, démontrer que l'affixe $h(\theta)$ du point $H(\theta)$ est donnée par :

$$h(\theta) = -2 + e^{2i\theta}.$$

2. Construction de \mathcal{L} :

- a. Expliquer pourquoi on peut, dans un premier temps, se limiter au cas où : $\theta \in [0 ; \pi]$.
- b. Étudier les variations, sur $[0 ; \pi]$, des fonctions $\theta \mapsto x(\theta)$ et $\theta \mapsto y(\theta)$.
(On établira en particulier que : $y'(\theta) = -4f(\theta)$, avec les notations de la partie A).
- c. Représenter sur la figure 1 les tangentes à \mathcal{L} aux points $M(0)$, $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $M(\theta_0)$, $M(\pi)$, $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$. (On rappelle que la tangente à \mathcal{L} au point $M(\theta)$ est dirigée par le vecteur de coordonnées $(x'(\theta), y'(\theta))$, noté $\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta)$, si ce vecteur n'est pas nul).
- d. Achever le tracé de \mathcal{L} , en se conformant aux résultats précédents.

3. Construction de la tangente en un point quelconque de \mathcal{L}

Démontrer que l'affixe du vecteur $\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta)$ s'obtient en multipliant par i l'affixe du vecteur $\overrightarrow{H(\theta)M(\theta)}$.

Interpréter géométriquement, et en déduire une construction pratique de la tangente à \mathcal{L} en n'importe quel point ; illustrer ce résultat (sur la figure 1) dans le cas particulier où : $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

- a. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, calculer l'affixe $m(\theta + \pi)$ du point $M(\theta + \pi)$, et démontrer que l'affixe du milieu $L(\theta)$ du segment $[M(\theta)M(\theta + \pi)]$ est donnée par : $l(\theta) = -2(1 + e^{2i\theta})$.
- b. Démontrer que le lieu du point $L(\theta)$, lorsque θ décrit \mathbb{R} , est le cercle Γ de diamètre $[OA]$.
Illustrer ce résultat, sur la figure 2.
- c. Démontrer que $H(\theta)$ est le point de Γ diamétralement opposé à $L(\theta)$.