∽ Baccalauréat Strasbourg juin 1966 ∾
Mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}x},\ \overrightarrow{\mathrm{O}y}\right)$. O est le centre du cercle (C) de rayon 8 ; Ω est le centre du cercle (Γ) de rayon 4 ; les coordonnées de Ω sont (+ 3 ; 0).

1. Définir par leurs centres et par leurs rapports les homothéties transformant (C) en (Γ).
2. Définir par leurs centres et par leurs puissances les inversions transformant (C) en (Γ).
3. Définir par son pied, H, sur on l'axe radical de (C) et de (Γ).
4. Donner les positions des points limites, I et J, du faisceau défini par (C) et (Γ).

EXERCICE 2

Partie A

Dans le plan (Π) rapporté à un repère orthonormé $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}x},\ \overrightarrow{\mathrm{O}y}\right)$ on considère la courbe représentée par l'équation

$$(1) \qquad y^2 = 2px + qx^2.$$

À tout couple de nombres réels $(p~;~q)$ correspond une courbe, notée $\Gamma(p~;~q)$, d'équation (1).
Lorsque p et q prennent des valeurs réelles arbitraires les $\Gamma(p~;~q)$ constituent une famille notée Φ.

1. Pour quelles valeurs de q les courbes $\Gamma(p~;~q)$ sont-elles :
   a. des paraboles ;
   b. des hyperboles ;
   c. des ellipses d'axe focal Ox ;
   d. des ellipses d'axe focal parallèle à Oy ?
2. Exprimer, dans chacun de ces cas, l'excentricité de $\Gamma(p~;~q)$ en fonction de q.

Partie B

Soit A le point $(-4~;~0)$ et (D) la droite d'équation $x = -4$.
M étant un point du plan (Π), la droite OM coupe (D) en P. On désigne par N le conjugué harmonique de M par rapport à O et à P. On désigne par H l'application qui à M fait correspondre N.

1. Quels sont les points doubles de H ?
   Tout point de (Π) possède-t-il un transformé ?
   L'application H est-elle biunivoque ? Est-elle involutive ?
2. Soit $(X~;~Y)$ les coordonnées de M, $(U~;~V)$ celles de N. Démontrer que

$$U = -\frac{2X}{X+2}, \quad V = -\frac{2Y}{X+2}.$$

Partie C

1. Démontrer qu'une courbe $\Gamma(p\ ;\ q)$ appartenant à la famille Φ est transformée par H en une courbe $\Gamma(p'\ ;\ q')$ appartenant à la famille Φ.

   Caractériser les paraboles de Φ transformées en ellipses.

   Quelle est la parabole de Φ qui est transformée en cercle ? Quel est ce cercle ?

   Montrer que les transformées des hyperboles équilatères de Φ passent par deux point fixes autres que O.

2. On considère la famille F des courbes $\Gamma(p\ ;\ q)$ passant par A : $\mathrm{F} \subset \Phi$, et l'on désigne ces courbes par $\mathrm{C}(q)$.

   Montrer que F est globalement invariante par la transformation H.

   Exprimer le carré de l'excentricité e' de la transformée $\mathrm{C}(q')$ d'une courbe $\mathrm{C}(q)$ en fonction du carré de l'excentricité, e, de $\mathrm{C}(q)$.

N. B. - Les parties A et B du problème sont indépendantes l'une de l'autre.