Durée : 4 heures

Baccalauréat Strasbourg juin 1965

Série mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Montrer que le polynôme

$$x^3 - 8x^2 + 25x - 26$$

est divisible par $x - 2$.
En déduire ses racines, réelles ou complexes.

EXERCICE 2

Mettre l'expression $\sqrt{3}\sin x - \cos x$ sous la forme $a\cos(x - \varphi)$.
Étudier les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{3}\sin x - \cos x + 2}$$

dans l'intervalle $[-\pi ; +\pi]$. Construire son graphe et en préciser l'allure au voisinage du point d'intersection avec l'axe des abscisses.

EXERCICE 3

Soit (P) un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$. On considère, dans (P), les droites (D) d'équation $x = a (a > 0)$, (D′) d'équation $x = -a$.
On désigne par E le complémentaire (dans P) de la réunion des droites $x'Ox$, (D) et (D′), par C l'intersection de $x'Ox$ et de (D), par B l'intersection de $x'Ox$ et de (D′).

1. Soit $M_1 \in E$ et A′, B′, C′ les projections orthogonales de M_1 respectivement sur $x'Ox$, (D) et (D′).
   Calculer les coordonnées de A′, B′, C′ en fonction des coordonnées $(x_1 ; y_1)$ de M_1.
   Calculer les coordonnées du centre, I, du cercle (γ) circonscrit au triangle A′B′C′.
2. **a.** Soit M_2 de coordonnées $(x_2 ; y_2)$, le symétrique de M_1 par rapport à I. Montrer que

   $$x_2 = -x_1, \quad y_2 = \frac{a^2 - x_1^2}{y_1}.$$

   b. On désigne par $\mathcal{T}$ la transformation qui, à $M_1 \in E$, fait correspondre M_2 ; montrer que $\mathcal{T}$ est une application biunivoque de E sur E.
   Montrer que $\mathcal{T}$ est involutive. Déterminer les points de E invariants par $\mathcal{T}$.
3. **a.** Soit (Δ) la droite d'équation

   $$x = b \quad (b \neq \pm a) \quad \text{et} \quad (\Delta') = (\Delta) \cap E.$$

   Déterminer le transformé $\mathcal{T}(\Delta')$ de (Δ′) par $\mathcal{T}$ [c'est-à-dire l'ensemble des points $\mathcal{T}(M_1)$ où $M_1 \in (\Delta')$].

b. Soit (Δ_1) la droite d'équation

$$y = c \quad (c \neq 0) \quad \text{et} \quad \left(\Delta_1'\right) = (\Delta_1) \cap \mathrm{E}.$$

Déterminer l'ensemble $\mathcal{T}\left(\Delta_1'\right)$.

4. Montrer que M_2 est le centre d'un cercle passant par les symétriques, A_2, B_2, C_2, de M_1 respectivement par rapport à $x'\mathrm{O}x$, D et D$'$.

Montrer que B est le milieu de $\mathrm{A}_2\mathrm{C}_2$.

Comparer les angles de droites $(\mathrm{BC}', \mathrm{BM}_1)$ et $(\mathrm{BM}_2, \mathrm{BC})$; quelles sont les bissectrices de $(\mathrm{BM}_1, \mathrm{BM}_2)$?

Déterminer d'une façon analogue les bissectrices de $(\mathrm{CM}_1, \mathrm{CM}_2)$.

Déduire de ce qui précède une construction simple de $\mathrm{M}_2 = \mathcal{T}(\mathrm{M}_1)$.

Retrouver les propriétés de la transformation $\mathcal{T}$ établies au 2 b.

5. Montrer qu'il existe une conique et une seule de foyer M_1 $(\mathrm{M}_1 \in \mathrm{E})$ tangente à (D), (D$'$) et $x'\mathrm{O}x$.

La déterminer et préciser son second foyer.