Strasbourg juin 1967
Baccalauréat mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

En utilisant la théorie des congruences, trouver les restes de la division par 7 des nombres

$$5^3,\quad 5^6,\quad 5^{6n+1}+5^{3n+2}-2.$$

(n est un entier naturel quelconque.)

EXERCICE 2

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$. Soit T l'application qui, au point M, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, non toutes deux nulles, fait correspondre $M'(X\ ;\ Y)$ tel que

$$X=\frac{k^2x}{x^2+y^2},\qquad Y=\frac{k^2y}{x^2+y^2},$$

k étant un nombre réel donné, strictement positif.

1. T a-t-elle des points doubles ?
   Montrer que l'application T du plan privé de O est biunivoque et involutive.
2. Montrer que les points O, M et M' sont alignés.
   Calculer $\overrightarrow{\text{O}M}\cdot\overrightarrow{\text{O}M'}$. En déduire la nature de l'applica- tion T.

Partie B

Soit, dans le plan, le point A de coordonnées $(a\ ;\ 0)$, $a>0$, la droite (D) d'équation $x=2a$, le cercle (C) de centre A, passant par O et la droite (L) passant par O et telle que $(\text{O}x,\ \text{L})=u$:

$$0\leqslant u<\pi,\qquad u\neq\frac{\pi}{2}$$

1. (L) coupe le cercle (C) en P et la droite (D) en Q.
   Écrire l'équation de (C) et trouver les coordonnées des points P et Q.
2. Soit N le point tel que $\overrightarrow{\text{ON}}=\overrightarrow{\text{PQ}}$. Calculer les coordonnées, x_1 et y_1 de N.
   Trouver une relation indépendante de u entre ces coordonnées.

Partie C

1. Étudier les variations de la fonction

$$y=x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}.$$

   Tracer son graphique, (G). On précisera la tangente en O.

2. En déduire le graphique, (G'), de la fonction

$$y = -x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$$

et l'ensemble, (G''), des points dont les coordonnées sont liées par

$$x\left(x^2+y^2\right) = 2ay^2.$$

Partie D

Appliquer à (G'') la transformation T. Montrer que l'on obtient alors une parabole privée du point O.
Déterminer k pour que le foyer de cette parabole soit le point A.

N. B. - On pourra considérer que les parties A, B et C sont indépendantes.