∽ Baccalauréat Strasbourg septembre 1951 ∾

SÉRIE MATHÉMATIQUES

I

1er sujet
Montrer que le mouvement rectiligne défini par l'équation

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\omega t + \beta)$$

est, en général, un mouvement vibratoire simple dont on déterminera les éléments (on supposera les nombres a et b positifs).

2e sujet
Mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un axe : définition, propriétés principales, vitesse angulaire du corps.

3e sujet
Équilibre d'un point matériel M pouvant glisser avec ou sans frottement sur une sphère.
Application : Déterminer les positions d'équilibre lorsque la seule force directement appliquée à M est son poids.

II

A et B désignent deux points diamétralement apposés sur un cercle (C) de centre O et de rayon r. Deux points variables M et N décrivent la droite BT, tangente en B à (C), de façon que M soit constamment le milieu de SN. La droite AM recoupe (C) en P, la droite AN recoupe (C) en Q.

1. Calculer-les tangentes du angles du triangle APQ en fonction de r et de la longueur x du segment SM.

   Déterminer par sa tangente le maximum de l'angle PAQ lorsque x varie. Monter que lorsque ce maximum est atteint, la droite PQ est parallèle au diamètre AB.
2. Soient H et K les projections respectives de A et B sur la droite PQ.

   Établir les égalités HQ = QP = PK (à cet effet on pourra démontrer au préalable l'égalité des angle HAQ et PAB).

   En déduire que, lorsque M décrit la droite BT, la droite PQ reste tangente à une ellipse fixe (E) de cercle principal (C). Quelle est l'excentricité de (E) ?
3. Soit (Γ) le cercle orthogonal à (C) en P et Q. En utilisant une inversion convenable de centre A, montrer que, lorsque M décrit la droite BT, le cercle (Γ) est constamment tangent à deux cercles fixes et la droite joignant les points de contact passe par un point fixe.

   En déduire le lieu géométrique du pôle de la droite PQ par rapport à (C).

N. B. Les trois parties du problème peuvent être traitées dans un ordre arbitraire.