∽ Baccalauréat Strasbourg septembre 1966 ∾
série mathématiques élémentaires

I.

1. Calculer les nombres complexes satisfaisant à l'équation

$$z^2 = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}$$

2. Calculer les nombres complexes $z = x + \mathrm{i}y$ satisfaisant à l'équation $z^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

   Utiliser ces résultats pour déterminer $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

II.

Dans un plan on donne un système d'axes orthonormé $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$ et l'hyperbole (H) d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Une droite fixe (Δ) passant par l'origine est déterminée par sa pente, m.
Une droite (δ) variable se déplace en restant parallèle à la droite (Δ).

1. Trouver l'équation aux abscisses des points d'intersection, M et M$'$ (s'ils existent), de cette droite v avec l'hyperbole (H).

   En déduire l'ensemble des points P milieux des cordes MM$'$.
2. Soit $u'\mathrm{H}u$ la directrice de (H) associée au foyer F et H son point d'intersection avec l'axe focal.

   On désigne par d son point d'intersection avec le lieu de P trouvé dans la question précédente et par d' son point d'intersection avec la droite (Δ).

   Montrer que la droite dF est perpendiculaire à la droite (Δ) et que

$$\overline{\mathrm{H}d}\cdot\overline{\mathrm{H}d'} = \frac{a^2}{c^2}\left(c^2 - a^2\right).$$

   En déduire que les directions Od et Od' sont conjuguées harmoniques par rapport aux asymptotes de l'hyperbole.

   Quel est l'ensemble des milieux des cordes parallèles Od ?
3. On considère maintenant l'ensemble de toutes les droites passant par le foyer F.

   Trouver l'ensemble du milieu, I, de ces cordes focales.

   On déterminera la nature de la courbe, son centre, ses sommets, ses foyers et seS asymptotes.
4. Montrer que cette courbe est la transformée de l'hyperbole (H) dans l'homothétie de centre R et de rapport $\dfrac{e}{2}$, où $e = \dfrac{c}{a}$, R étant le point de l'axe $x'\mathrm{O}x$ d'abscisse $\dfrac{ac}{2a - c}$.