Baccalauréat Strasbourg septembre 1967
Mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

I.

1. Quelle est la limite de $\dfrac{\text{Log}\,x}{x^2}$ et quelle est celle de $y = -x^2 + x + 6\text{Log}\,x$ lorsque x tend vers $+\infty$? (Log x désigne le logarithme népérien de x.)
2. Étudier les variations de la fonction

$$y = -x2 + x + 6\text{Log}\,x$$

   et tracer son graphique (C) en repère orthonormé.

II.

Déterminer tous les entiers n tels que le polynôme

$$5n^2 - 3n + 6$$

soit divisible par 7 (on pourra utiliser la théorie des congruences).

III.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $x\text{O}y$.

1. X et Y étant les coordonnées d'un point M, déterminer les coordonnées X_1 et Y_1 du point M_1 symétrique de M par rapport à la droite (d) d'équation

$$x + y\sqrt{3} = 0.$$

   On écrira les équations paramétriques de la perpendiculaire abaissée de M à la droite (d) et l'on déterminera son intersection avec (d).
2. $\text{M}_1\,(X_1\ ;\ Y_1)$ étant le symétrique de $\text{M}(X\ ;\ Y)$ par rapport à (d), on considère la transformation ponctuelle, $\mathcal{D}$, qui transforme le point $\text{M}(X\ ;\ Y)$ en le point $\text{M}_2\,(X_2\ ;\ Y_2)$ tel que l'on ait

$$X_2 = -X_1, \quad Y_2 = -Y_1.$$

   Montrer que $\mathcal{D}$ est un déplacement, que l'on caractérisera.
3. Déterminer en fonction des coordonnées X et Y de M les coordonnées du milieu, I, de MM_2.
   M décrivant la droite d'équation $x = a$ (a étant un nombre réel donné), quel est l'ensemble des points I ?
   Déterminer les coordonnées du point P tel que

$$\overrightarrow{\text{PM}} + k\overrightarrow{\text{PM}}^2 = 0,$$

   k étant un nombre réel donné différent de -1.
   En déduire sans calcul l'ensemble des points P quand M décrit la droite d'équation $x = a$.

4. Les relations

$$\left\{\begin{array}{lcl} X' & = & \ell\left(X - Y\sqrt{3}\right),\\ Y' & = & a + \ell\left(X\sqrt{3} + Y\right), \end{array}\right.$$

où a et ℓ sont deux nombres réels donnés ($l \neq 0$) définissent une transformation ponctuelle, T, associant au point M$(X~;~Y)$ le point M$'\left(X'~;~Y'\right)$.

a. Quel est l'ensemble des points M tels que O, M et M$'$ soient alignés ?

b. Quel est l'ensemble des points M tels que MM$'$ ait une direction donnée, de pente m ?

c. O$'$ étant le transformé de O, comparer les longueurs OM et O$'$M$'$ et calculer l'angle (OM, O$'$M$'$). En déduire la nature de T.

5. On désigne par F le point double de T.
Déterminer, de préférence sans calcul, l'ensemble des points F :

a. si ℓ est fixe et a variable ;

b. si a est fixe et ℓ variable.
(On pourra utiliser les points homologues O et O$'$.)