∽ Baccalauréat C (oral) Strasbourg juin 1968 ∾

Exercice 1

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, les coordonnées d'un point variable M sont, définies en fonction du temps, t, par les formules suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a(1+\cos 2t),\\ y & = & b\sin 2t,\end{array}\right. \qquad (a > b > 0).$$

1. Quelle est. la trajectoire de ce mobile ?
2. Calculer, en fonction de t, la longueur de son vecteur vitesse.
3. Déterminer l'hodographe du mouvement du point M.

Exercice 2

Soit (E) l'ensemble des points du plan rapporté à un repère orthonormé dont les coordonnées, x et y, satisfont la relation suivante :

$$y^2 = ax^2 + bx + c,$$

où a, b et c désignent des nombres réels donnés.
Étudier, suivant les signes de a et de $4ac - b^2$, la nature de l'ensemble (E).

Exercice 3

On considère, dans le plan complexe, deux points fixes, A et B, d'affixes a et b, et un point variable M, d'affixe z. Soit Z le nombre complexe défini par

$$Z = \frac{z-a}{z-b}$$

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que Z ait un module, r, donné.
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que Z ait un argument θ donné (à $k\pi$ près).
3. Déduire de ce qui précède la construction du point M tel que, c étant l'affixe d'un point donné C, Z soit le complexe conjugué de $\dfrac{c-a}{c-b}$.

Les questions posées à un même candidat sont comprises entre deux traits.

Exercice 1

1. On considère la transformation qui, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, fait correspondre au point $M(x\,;\,y)$ le point M' tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x-y+2,\\ y' & = & X+y-3.\end{array}\right.$$

Montrer, en exprimant $z' = x' + \mathrm{i}y'$ en fonction de $z = x + \mathrm{i}y$, que cette transformation est une similitude directe, $\mathscr{S}_1$ dont on précisera le centre, le rapport et l'angle.

2. Identifier de façon analogue la transformation $\mathscr{S}_2$ définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \dfrac{\sqrt{2}}{4}x - \dfrac{\sqrt{6}}{4}y,\\ y' & = & \dfrac{\sqrt{6}}{4}x + \dfrac{\sqrt{2}}{4}y.\end{array}\right.$$

3. Définir géométriquement, puis, par utilisation des nombres complexes, les transformations

$$\mathscr{R} = \mathscr{S}_1 \circ \mathscr{S}_2 \quad \text{et} \quad \mathscr{R}' = \mathscr{S}_2 \circ \mathscr{S}_1.$$

En déduire $\sin \dfrac{\pi}{12}$ et $\cos \dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 2

Un ensemble E a une structure de groupe par une loi de composition interne, notée $\star$.
On pose, $\forall a \in \mathrm{E} \quad a \star a = a^2$ et, de façon générale,

$$a \star a \star a \ldots \star a = a^n.$$

Montrer que, si l'on a

$$\forall a \in \mathrm{E}, \quad \forall b \in \mathrm{E}, \quad (a \star b)^2 = a^2 \star b^2.$$

le groupe est commutatif.
En raisonnant par récurrence, montrer que l'on a alors

$$(a \star b)^n = a^n \star b^n.$$

Résoudre, dans ce groupe abélien, l'équation suivante :

$$(a \star b)^2 \star x^2 \star a \star b^2 = c \star x \star (a \star b)^3.$$

Exercice 3

Dans une rotation, $\mathscr{R}$, de centre A et d'angle α, tout point M du plan se transforme en un point M'.
Soit I un point fixe du plan.

1. Déterminer l'ensemble, (E), des points M tels que la droite MM' passe par le point I.

2. Déterminer l'ensemble, $\left(\mathrm{E}'_1\right)$, des points M tels que, k étant une constante positive donnée, l'on ait $\dfrac{\mathrm{I}M}{\mathrm{I}M'} = k$ et l'ensemble, $\left(\mathrm{E}'_2\right)$, des points M tels que, θ étant donné, compris entre 0 et 2π, l'on ait

$$\left(\mathrm{I}M,\ \mathrm{I}M'\right) = \theta \quad (\text{mod.}\, \pi).$$

[Pour la recherche de $\left(\mathrm{E}'_1\right)$ et $\left(\mathrm{E}'_2\right)$, on pourra utiliser le point I$'$, transformé de I par la rotation $\mathscr{R}$.]

Exercice 1

On considère, dans le plan complexe, l'inversion $(\mathscr{I})$, de pôle O et de puissance k^2 ; cette inversion transforme tout point M, d'affixe z non nulle, en un point M', d'affixe z'.

1. Montrer que, $\overline{z}$ désignant le complexe conjugué de z, on a

$$z' = \frac{k^2}{z}.$$

2. À l'aide de cette relation montrer que $(\mathscr{I})$ est une transformation involutive ; chercher l'ensemble des points invariants ; définir le produit de deux inversions positives de pôle O, ainsi que le produit de $(\mathscr{I})$ et d'une homothétie de centre O.

Chercher enfin les figures transformées par $(\mathscr{I})$ des cercles de centre O et des droites du faisceau de sommet O.

Exercice 2

1. On considère la fonction

$$y_1 = \frac{4\mathrm{e}^{2x+3} - 6}{6\mathrm{e}^{2x+3} + 3}.$$

Calculer la dérivée, y_1', de y_1 par rapport à x, puis, en posant $\mathrm{e}^{2x+3} = X$, calculer la dérivée de y_1 par rapport à X et retrouver le résultat précédent.

2. D'une façon analogue, étant donné la fonction

$$y_1 = \frac{4\mathrm{e}^{-2x-3} - 6}{6\mathrm{e}^{-2x-3} + 3}.$$

calculer de deux façons la dérivée, y_1', de y_2 par rapport à x.

3. Soit la fonction

$$y = \frac{4\mathrm{e}^{|2x+3|} - 6}{6\mathrm{e}^{|2x+3|} + 3}.$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de cette fonction au point d'abscisse $x = -\dfrac{3}{2}$.

Exercice 3

On considère la transformation ponctuelle $\mathscr{T}$ qui, dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}x,\ \mathrm{O}y)$, peut faire correspondre au point M, d'affixe z, le point M', d'affixe

$$z' = (\alpha + \beta\mathrm{i})z + (1 - \lambda\mathrm{i}),\ \ \alpha + \beta, \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer α et β de telle façon que $\mathscr{T}$ soit une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$.

2. Les paramètres α et β étant ainsi fixés, déterminer, lorsque λ varie, l'ensemble des centres de ces similitudes.

   Déterminer λ de façon que la droite Oy se transforme en la droite Ox.

   La similitude est alors parfaitement définie ; soit Ω son centre. Deux points distincts, A et B, de Oy se transforment en deux points distincts, A$'$ et B$'$, de Ox.

   Montrer géométriquement que les cercles (OAA$'$) et (OBB$'$) se recoupent en Ω.

Exercice 1

Déterminer deux entiers naturels, a et b $(a < b)$, ayant pour somme 264 et pour plus grand commun diviseur 12.

Exercice 2

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, on désigne par μ le symétrique d'un point $m(x\,;\,y)$ par rapport à la première bissectrice des axes de coordonnées et par m' le symétrique du point μ par rapport à l'axe $x'x$.

   Calculer les coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ du point m' en fonction des coordonnées $(x\,;\,y)$ du point m.

   Quelle est la transformation qui fait passer de m à m' ?
2. Soit $\mathcal{T}$ la transformation dans laquelle le point $m(x\,;\,y)$ a pour transformé le point $M(X\,;\,Y)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l c l}X &=& 1+y,\\ Y &=& 1-x.\end{array}\right.$$

   Montrer que cette transformation est une rotation, dont on précisera le centre et l'angle.

Exercice 3

Énoncer le théorème de Gauss.

Exercice 4

Calculer l'intégrale indéfinie suivante :

$$\int \frac{1}{x\text{Log}\,x}\,\text{d}x.$$
