Durée : 4 heures

Baccalauréat C Sud-Cameroun juin 1969

EXERCICE 1

Dans l'ensemble, E, des couples de nombres réels (a, b), le premier terme, a, n'étant pas nul, on définit une loi de composition interne, notée $\star$ par la condition

$$(a,\ b) * \left(a',\ b'\right) = \left(aa',\ ab' + b\right).$$

1. Montrer que E est un groupe pour cette loi de composition. Ce groupe est-il commutatif ?
2. Montrer que l'ensemble, F, des éléments de E de la forme $(a,\ 0)$ constitue aussi un groupe pour la même loi $\star$.

   On considère l'application h de F dans l'ensemble, $\mathbb{R}'$, des nombres réels non nuls, définie par $h[(a,\ 0)] = a$.

   Montrer que c'est un isomorphisme de F dans l'ensemble $\mathbb{R}'$ muni de la multiplication des nombres réels.

EXERCICE 2

1. Résoudre dans l'ensemble, $\mathbb{C}$, des nombres complexes les équations suivantes :
   a. $z^2 = 2\text{i}$;
   b. $f(x) = x^2 - 4x + 5 = 0$.
2. Montrer que le polynôme

$$g(x) = x^2 - (1 + 2\text{i})x^2 - 3x + 2\text{i} - 1$$

   admet pour zéro l'un des zéros de $f(x)$.
3. Décomposer $g(x)$ en un produit de facteurs du premier degré à coefficients réels ou complexes.

PROBLÈME

Soit un repère orthonormé $x\text{O}y$ et le point A de coordonnées

$$x = \frac{2}{9} \quad \text{et} \quad y = -\frac{3}{2}.$$

On considère la droite (D) de coefficient directeur t passant par O et la droite (D$'$) passant par A dont le coefficient directeur, t', est tel que

$$3tt' + t - t' + 1 = 0.$$

On suppose que t représente le temps et varie de $-\infty$ à $+\infty$.

1. Les droites (D) et (D$'$) peuvent-elles être parallèles ?

   On appelle M leur point d'intersection. Montrer que, lorsque t varie, M décrit l'ellipse (E) d'équation 2 2

$$\left(\frac{x-3}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 0.$$

   Tracer cette ellipse. Quelles sont les coordonnées des foyers de (E) et les équations de ses directrices ? Comment le point M décrit-il sa trajectoire ?

2. On pose $t = \text{tg}\,\theta$, θ variant de $-\dfrac{\pi}{2}$ à $+\dfrac{\pi}{2}$

a. Calculer en fonction de θ la longueur du segment OM et tracer la courbe représentative des variations de OM en fonction de θ.

b. Soit B le point de coordonnées $x = 6$, $y = 0$.

Calculer en fonction de θ l'aire, s, du triangle OMB ; étudier les variations de la fonction $s(\theta)$ ainsi obtenue et tracer sa représentation graphique, (L), dans un repère orthonormé θOs.

Calculer l'aire géométrique de la surface comprise entre la courbe (L) et l'axe des abscisses.

3. On considère la transformation qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = 6\frac{\overline{z}}{z},$$

$\overline{z}$ étant le conjugué de z.

Lorsque M décrit sa trajectoire, (E), M' décrit une courbe (C), que l'on déterminera.

Comment M' décrit-il sa trajectoire ? Trouver un produit de transformations qui, à la courbe (E), fasse correspondre le cercle (C).