∽ Pondichéry juin 1962 ∾

SÉRIE MATHÉMATIQUES

I

On donne, dans un plan orienté, un rectangle ABCD :

$$\text{AB} = a, \quad \text{AD} = 2a, \quad \left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right) = +\frac{\pi}{2}.$$

Soit M le milieu de BC. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe transformant $\overrightarrow{\text{AB}}$ en $\overrightarrow{\text{MD}}$; montrer que le centre, O, de cette similitude est le symétrique de M par rapport à BD.

II

Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires, $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, dont les vecteurs unitaires ont même longueur, on donne le point A(5 ; 0) (abscisse 5, ordonnée 0) et le cercle (A), de centre A, de rayon 4. On désigne par (F) le faisceau de cercles défini par (A) et l'axe radical $y'y$.

1. Quelle est la nature de (F) ?

   Dans tout le problème, le point B(x ; 0) sera le centre d'un cercle (B) de ce faisceau ; caractériser l'ensemble des valeurs de x telles que, pour chacune d'elles, le cercle (B) de centre B(x ; 0) existe.

   Calculer le rayon, b, de (B) en fonction de x.

   Le diamètre de (B) perpendiculaire à $x'x$ coupe (B) en deux points, M et M$'$; montrer que, quand x varie, le lieu de M et M$'$ est une hyperbole équilatère, dont on déterminera les sommets, les foyers, les asymptotes, les directrices. Calculer x pour que le cercle (B) correspondant soit tangent aux asymptotes.
2. Soient, quand ils existent, S le centre d'homothétie positive et S$'$ le centre d'homothétie négative des cercles (A) et (B) ; on désigne par s et s' les abscisses respectives de ces points. Montrer que

   $$s = \frac{5b-4x}{b-4} \quad \text{et} \quad s' = \frac{5b+4x}{b+4}.$$

   Vérifier que le cercle de diamètre SS$'$ appartient au faisceau (F), puis exprimer en fonction de x seul l'abscisse de son centre et son rayon.
3. Calculer en fonction de x l'aire, z, du triangle SS$'$M (ou du triangle SS$'$M$'$), M et M$'$ étant les points introduits dans la question 1.

   Étudier les variations de z et tracer la courbe représentative de ces variations (1 cm = 2 unités sur l'axe des x, 1 cm = 8 unités sur l'axe des z).

   Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre des racines de l'équation $z = m$.

   Application : Déterminer x pour que l'on ait $z = \dfrac{20}{3}$.