Durée : 4 heures

Baccalauréat C Sud-Vietnam septembre 1969

EXERCICE 1

Calculer le reste de la division euclidienne de l'entier naturel $n = 1952 \times 2341$ par 7.

EXERCICE 2

Soit la fonction f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = x\mathrm{e}^x.$$

1. Étudier la limite de $x\mathrm{e}^x$ lorsque x tend vers $-\infty$ (on pourra poser $x = -\mathrm{Log}\,u$).
   Étudier le sens de variation de la fonction f et construire la courbe représentative (C) dans un repère orthonormé.
2. Déterminer les constantes réelles a et b pour que la fonction F définie par $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$ soit une primitive de f.
   Calculer l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = -1$.

PROBLÈME

Soit, dans un repère orthonormé d'axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$, le point fixe A de l'axe Oy d'ordonnée a (a : nombre réel positif donné). Soit le cercle fixe (C) de centre A passant par l'origine O et le point B diamétralement opposé à O sur ce cercle.
λ et μ étant deux nombres réels, on considère deux points distincts, P et Q, variables sur l'axe $x'\mathrm{O}x$, définis par $\overline{\mathrm{OP}} = \lambda$ et $\overline{\mathrm{OQ}} = \mu$.
Les tangentes, autres que Ox, menées de P et Q au cercle (C) se coupent, en général, en un point M.
On désigne par T et T$'$ respectivement leurs points de contact avec le cercle (C).

1. Former les équations cartésiennes des tangentes, autres que Ox, menées des points P et Q au cercle (C).
   Établir que les coordonnées du point M, lorsqu'il existe, sont données par les formules
   $$x = \frac{a^2(\lambda+\mu)}{\lambda\mu + a^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{2a\lambda\mu}{\lambda\mu + a^2}$$
   Pour quels couples de valeurs de λ et μ le point M n'existe-t-il pas ?
   Dans chacune des questions de la suite du problème, on supposera que λ et μ sont liés par une relation, (ρ).
   À l'ensemble des couples de valeurs vérifiant une telle relation correspondront un ensemble E_ρ, de points M et un ensemble $\mathscr{D}_\rho$ de droites TT$'$.
2. On suppose λ et μ liés par la relation
   $$(1) \qquad \lambda\mu = -k^2$$
   où k désigne un nombre réel positif donné différent de a.
   a. Caractériser géométriquement l'ensemble, El, des points M correspondants.
   b. Montrer que toutes les droites TT$'$ appartenant à $\mathscr{D}_1$ passent par un même point.

c. À tout point M correspond un point ω sur la droite MA, centre d'un cercle distinct de (C) et tangent aux trois côtés du triangle MPQ. À l'ensemble E_1 de points M correspond un ensemble Q de points ω, que l'on demande de caractériser géométriquement.

3. On suppose maintenant λ et μ liés par la relation

$$(2) \qquad \lambda + \mu = s,$$

où s est un nombre réel donné.

a. Caractériser géométriquement l'ensemble, E_2, des points M correspondants.

b. Montrer que, toutes les droites TT′ appartenant à $\mathcal{D}_2$ passent par un même point, I.

c. Ainsi, à tout nombre réel s on associe un point I du plan. Lorsque s parcourt l'ensemble des nombres réels, quelle est la courbe décrite par le point I ?

4. a. À quelle relation (3) λ et μ doivent-ils satisfaire pour que la distance des points P et Q reste constante et égale à $2a$?

b. Former l'équation cartésienne de l'ensemble, E_3, des points M obtenus lorsque λ et μ satisfont à la relation (3).

Préciser la nature de la courbe E_3 et la construire.