Sud VietNam juin 1967
Baccalauréat mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Soit φ un nombre réel compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; $\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ et soit p le nombre complexe

$$p = \cos\varphi + \text{i}\sin\varphi.$$

1. Calculer le module et l'argument du nombre $p^2 - 1$.
2. Soit z_1 et z_2 les solutions complexes de l'équation

$$z^2 - 2pz + 1 = 0.$$

Montrer que z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation

$$(z - p)^2 = p^2 - 1.$$

Calculer le module et l'argument des nombres $z_1 - p$ et $z_2 - p$.

EXERCICE 2

Étudier la fonction qui associe à la variable réelle x le nombre réel

$$y = \frac{x^2 - 7x + 8}{(x-2)^2}.$$

Soit (L) le graphique de cette fonction dans un repère orthonormé.
Utiliser le graphique (L) pour étudier, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation suivante :

$$4^x(1-m) + 2^x(4m-7) + 8 - 4m = 0.$$

EXERCICE 3

Le plan (Π) est rapporté à un repère orthonormé.
Soit $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$ les axes de coordonnées. On considère sur l'axe $x'\text{O}x$, le point S d'abscisse $\left(-\frac{p}{2}\right)$, p désignant un nombre réel strictement positif donné, ainsi que la droite (Δ) perpendiculaire en S à cet axe $x'\text{O}x$.

1. À tout point H de (Δ) on associe la droite (D) perpendiculaire en H à la droite OH. On pose

$$(x'\text{O}x,\ \text{OH}) = \varphi \quad (\text{modulo}\,\pi).$$

Écrire l'équation de la droite (D) en fonction de φ et p.
En déduire l'équation (1) qui détermine φ lorsque (D) passe en un point donné, M_0, de coordonnées $\left(x_0\ ;\ y_0\right)$.
Transformer cette équation en une équation (2) de la forme

$$(2) \qquad A\cos 2\varphi + B\sin 2\varphi + C = 0,$$

A, B, C s'exprimant au moyen de x_0, y_0 et p.
Vérifier que cette équation (2) ne peut admettre la solution $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (moduloπ).

Comparer alors les ensembles de solutions des équations (1) et (2).

Quel est l'ensemble (P) des points M du plan (Π) par où il ne passe qu'une seule droite (D) ?

Quel est l'ensemble E des points M du plan (Π) par où passent deux droites (D) ?

2. x_1 et y_1 désignant les coordonnées d'un point M_1 de l'ensemble E, l'équation (2) correspondante possède alors deux solutions, définies modulo π :

$$\varphi_1 \quad \text{et} \quad \varphi_2.$$

Exprimer ces solutions au moyen des angles auxiliaires θ et α définis par

$$A = r\cos\theta, B = r\sin\theta, C = -r\cos\alpha, \quad \alpha \in [0\ ;\ \pi].$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur x_1, y_1 et p pour que l'on ait

$$\begin{array}{rrcll} & \varphi_1 - \varphi_2 & = & \dfrac{\pi}{4} & (\text{modulo}\,\Pi), \\ \text{ou} & \varphi_1 - \varphi_2 & = & \dfrac{3\pi}{4} & (\text{modulo}\,\Pi). \end{array}$$

3. Soit Q un point de E. Par Q passent deux droites (D). On désigne par (D_1) et (D_2) ces droites, par H_1 et H_2 leurs points d'intersection respectifs avec (Δ).

On pose

$$\begin{array}{rcll} \varphi_1 & = & \left(x'\text{O}x,\ \text{OH}_1\right) & (\text{modulo}\,\pi), \\ \varphi_2 & = & \left(x'\text{O}x,\ \text{OH}_2\right) & (\text{modulo}\,\pi). \end{array}$$

On appelle $(\mathscr{H})$ l'ensemble des points Q de E tels que l'angle $(D_1,\ D_2)$ soit égal à $\dfrac{\pi}{4}$ ou $\dfrac{3\pi}{4}$ (modulo π).

Quelle est l'équation de $(\mathscr{H})$?

$(\mathscr{H})$ est une hyperbole, dont on déterminera le centre, les sommets, les foyers et les asymptotes. (Faire un dessin clair et précis, en prenant $p = 3$ cm.)

Situer $(\mathscr{H})$ par rapport à (P). Préciser, en particulier, les points communs à $(\mathscr{H})$ et (Δ), ainsi que les droites (D) passant par ces points.