✎ Baccalauréat C Sud-Vietnam juin 1968 ✎

SÉRIE C

Exercice 1

Dans le plan orienté, on donne un triangle équilatéral ABC, de sens direct, de centre O.
Déterminer la forme réduite du produit des transformations planes suivantes, effectuées dans l'ordre indiqué :
– rotation de centre B et d'angle $+\frac{\pi}{3}$, notée $R\left(\text{B},\ +\frac{\pi}{3}\right)$,
– translation de vecteur $\overrightarrow{\text{BC}}$, notée $T\left(\overrightarrow{\text{BC}}\right)$,
– rotation de centre C et d'angle $+\frac{\pi}{3}$, notée $R\left(\text{C},\ +\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé, d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$. Soit a un nombre positif donné, B le point de coordonnées $(3a\ ;\ 0)$ et C le point de coordonnées $(0\ ;\ 4a)$.

1. Déterminer les coordonnées du barycentre, G des trois points O, B et C, affectés respectivement des coefficients $\alpha = +1$, $\beta = -2$, $\gamma = +3$.
2. Déterminer, dans le plan considéré, l'ensemble des points M tels que

$$M\text{O}^2 - 2M\text{B}^2 + 3M\text{C}^2 = ka^2,$$

k étant un nombre réel donné.

Exercice 3

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, on considère le point A, de coordonnées $x = 0$, $y = 2$. Soit (C) le cercle de centre A et de rayon 1. 'Z tout point M du cercle (C) on associe l'angle

$$\theta = \left(\overrightarrow{\text{O}x},\ \overrightarrow{\text{A}M}\right).$$

La tangente en M à ce cercle coupe x'Ox au point I.

1. **a.** Calculer $\overline{\text{OI}} = \lambda$ en fonction de θ.
   Calculer en degrés, avec la précision permise par les tables de logarithmes, la valeur de θ comprise entre -90^o et $+90^o$ pour laquelle $\lambda = 2$.

   b. On pose $\text{tg}\,\frac{\theta}{2} = t$. Montrer que $\lambda = \dfrac{t^2+4t+1}{1-t^2}$.
   Étudier les variations de λ en fonction de t quand θ varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Construire le graphe de cette fonction dans un repère orthonormé.
2. *On suppose que* θ *varie entre* $-\frac{\pi}{2}$ *et* $-\frac{\pi}{2}$.
   Soit Iz la bissectrice de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{\text{I}x},\ \overrightarrow{\text{I}M}\right)$. Elle coupe la droite A$M$ en ω.

a. Déterminer les équations des droites Iz et AM et montrer que les coordonnées de ω en fonction de t sont

$$x_\omega = \frac{3(1+t)}{1-t} \quad \text{et} \quad y_\omega = \frac{2\left(t^2+t+1\right)}{(1-t)^2}.$$

Quel est, quand θ varie, l'ensemble des points ω ?

b. On considère le cercle (Γ), de centre ω et de rayon ωM. Montrer que ce cercle est tangent en Q à $x'\text{O}x$ et retrouver géométriquement l'ensemble des points ω lorsque M décrit (C).

3. Soit P le centre d'homothétie positive des cercles (C) et (Γ). P se projette orthogonalement en P$'$ sur $x'\text{O}x$; M se projette orthogonalement en M' sur $x'\text{O}x$.

a. Démontrer que les quatre points P$'$, M', O et Q forment une division harmonique. En déduire la mesure algébrique $\overline{\text{OP}'}$ en fonction de t.

b. On considère l'inversion de pôle O et de puissance -3.

Construire les transformés des cercles (C) et (Γ) et de la droite MI par cette inversion.

Soit K le centre du cercle transformé de la droite MI. Déterminer géométriquement l'ensemble des points K.