Durée : 4 heures

Baccalauréat C Sud-Vietnam juin 1969

EXERCICE 1

Résoudre l'équation

$$\cos^2[\text{Log}\, x] + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left[\text{Log}\left(x^2\right)\right] - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

où Log x désigne le logarithme népérien du nombre réel positif x. (On ne cherchera pas à donner des valeurs approchées des racines.)

EXERCICE 2

Dans un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, $z'\text{O}z$ la position d'un point mobile M est donnée à l'instant t par ses coordonnées :

$$x = \cos\left(\omega t^2\right), \quad y = \sin\left(\omega t^2\right), \quad z = \frac{5}{2}\,\omega t^2,$$

où ω est une constante positive donnée.

1. Sur quelle courbe le point mobile M se déplace-t-il ?
2. Déterminer le vecteur vitesse instantanée à l'instant t. Quelle est la vitesse algébrique, v, du point M sur sa trajectoire orientée dans le sens des t croissants ?
3. On rappelle que, si $s(t)$ est l'équation horaire du mouvement, on a $v = \dfrac{ds}{dt}$.
   Quelle est l'équation horaire du mouvement, en prenant pour origine, sur la trajectoire, le point M_0 correspondant à la position du point M à l'instant $t = 0$?

PROBLÈME

Le plan (Π) est rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$.

Partie A

On considère, dans ce plan, la famille, (C), de cercles (C_λ) d'équation

$$x^2 + y^2 - \lambda^2 x - 2\lambda y + 1 = 0,$$

où le paramètre λ est un nombre réel ($\lambda \in \mathbb{R}$).

1. Quelle est la partie, L, de $\mathbb{R}$ telle qu'à chaque nombre λ de L corresponde un cercle (C_λ) ?
   Calculer les coordonnées du centre et le rayon de (C_λ).
   Quel est, dans (Π), l'ensemble, (Γ), des centres des cercles (C_λ) ?
   L'application qui à λ fait correspondre le centre du cercle (C_λ) est-elle une bijection de L sur (Γ) ?
2. Montrer que, quel que soit λ, le cercle (C_λ) est orthogonal à un certain cercle, (A), dont on précisera le centre et le rayon.
3. À quelle condition les coordonnées $(u\ ;\ v)$ d'un point m de (Π) doivent-elles satisfaire pour que, par m :
   a. il passe deux cercles de la famille (C) ;
   b. il passe un seul cercle de la famille (C) ?

Partie B

Soit f la fonction qui, à tout nombre x de l'intervalle $]-1~;~0]$, fait correspondre le nombre

$$f(x) = \sqrt{\dfrac{-x\left(x^2+1\right)}{x+1}}.$$

1. Montrer que le signe de la dérivée, f', de f est celui de l'expression

$$-\left[2x^2(x+1)+x^2+1\right].$$

   Étudier les variations de f. Tracer son graphe, G, dans (Π) rapporté aux axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$.

   Le point O appartient à (G) : étudier la tangente à (G) en O.

2. Déduire de (G) la courbe (G') ayant pour équation, par rapport au repère donné,

$$y^2(1+x)+x\left(x^2+1\right)=0.$$

3. Des résultats des questions précédentes déduire l'ensemble, E, des points du plan (Π) par lesquels il passe deux cercles de la famille (C) et l'ensemble, E$'$, des points par lesquels il ne passe qu'un seul cercle de la famille (C).