


Baccalauréat mathématiques élémentaires

Sud Viet-Nam septembre 1964

EXERCICE 1

Soit $z = \cos a + i \sin a$ un nombre complexe d'image m et soit $Z = 1 + z = 1 + \cos a + i \sin a$ un nombre complexe d'image M .

1. Construire M , connaissant a ($0 \leq a < \pi$).
2. Déterminer en fonction de a le module r et l'argument θ de Z .

EXERCICE 2

1. Soit un plan rapporté à un repère orthonormé formé de deux axes $X'OX, Y'OY$ tels que $\left(\overrightarrow{X'X}, \overrightarrow{Y'Y}\right) = +\frac{\pi}{3}$. On considère la fonction

$$y = \frac{ax^2 + bx}{x^2 + x - 2}$$

où a et b représentent les coordonnées d'un point M du plan (a , abscisse; b , ordonnée).

Dans quelle région du plan doit-on prendre le point M pour que la fonction y reste monotone sur chacun des intervalles où elle est définie?

2. Soit maintenant, et pour le reste du problème, $a = 3, b = -6$. On a alors

$$(1) \quad y = \frac{3x(x-2)}{x^2 + x - 2}$$

Mettre y sous la forme $y = A + \frac{Bx + C}{x^2 + x - 2}$ puis sous la forme

$$(2) \quad y = A + \frac{M}{x-1} + \frac{N}{x+2},$$

A, B, C, M, N étant des constantes, que l'on déterminera.

3. Étudier les variations de la fonction y et tracer son graphe, (C) (repère orthonormé $x'Ox, y'Oy$).
4. La droite $y = m$ coupe, en général, (C) en deux points, M' et M'' , se projetant en P' et P'' sur l'axe $x'x$, d'abscisses respectives x' et x'' .
 Trouver une relation indépendante de m entre x' et x'' .
 Montrer que, par un changement d'origine sur l'axe des abscisses (O' , nouvelle origine) et posant $\overline{O'P'} = X', \overline{O'P''} = X''$, on peut écrire $X'X'' = k$, k étant une constante à déterminer.
 En déduire que les cercles de diamètre $P'P''$ passent par deux points fixes, A et B, quand m varie.
5. En utilisant la forme (2) de y , déterminer une primitive de y .
 En déduire l'aire limitée par (C), l'axe $x'x$, les droites $x = 2$ et $x = 4$.
6. On considère l'équation

$$(m-3)e^{2u} + (m+6)e^u - 2m = 0,$$

où u est l'inconnue, e la base des logarithmes népériens.

Déterminer (de préférence graphiquement) le nombre de racines de cette équation en u selon les diverses valeurs de m .

Calculer u dans le cas où $m = \frac{9}{5}$.

N. B. - On donnera les résultats numériques demandés aux questions 5 et 6 avec l'approximation des tables utilisées ; tables de logarithmes à 5 décimales, ou tables de logarithmes népériens, ou d'exponentielles. (Indiquer sur la copie la table utilisée.)