∽ Sud Viet-Nam septembre 1962 ∽

SÉRIE MATHÉMATIQUES

I

Résoudre

$$x^4 \cos^2 a - 2x^2(1+\sin a \cos b) + \sin^2 b = 0,$$

x étant l'inconnue, a et b des angles donnés [on pourra transformer $1 \pm \sin a$ en carré, en remarquant que $\sin a = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right)$].

II

Soient, dans le plan, deux axes rectangulaires, Ox, Oy, sur chacun desquels on choisit la même unité de longueur.
On donne l'équation

$$(2m+1)x^2 + (m-3)x - m = 0,$$

dans laquelle x désigne l'inconnue et m un paramètre.

1. Aux racines x' et x'' de cette équation correspondant à une valeur de m, on associe les points M$'$ et M$''$ de l'axe Ox tels que $\overline{\text{OM}'} = x'$ et $\overline{\text{OM}''} = x''$ et l'on considère le cercle (O) de diamètre M$'$M$''$.
   a. P étant un point quelconque du plan, de coordonnée x et y, évaluer la puissance p de P par rapport à (O) en fonction de m et des coordonnées de P.
   b. En déduire que l'on peut choisir P de manière que p soit nul quel que soit m.
   c. Caractériser la famille des cercles (O).
2. **a.** A étant un point fixe de l'axe Oy, d'ordonnée a, montrer que les cercles circonscrits au triangle AM$'$M$''$ appartiennent à un faisceau (F), que l'on caractérisera.
   b. Déterminer l'équation de l'axe radical du faisceau.
   c. Démontrer géométriquement que les polaires (D) de O par rapport aux cercles du faisceau (F) passent par un point fixe.
   d. Lieu de H, projection orthogonale de O sur (D).