∽ Baccalauréat C Sud Vietnam juin 1971 ∾

EXERCICE 1

Résoudre dans le corps des complexes l'équation en z

$$z^2 + (5\mathrm{i} - 6)z - 16\mathrm{i} + 2 = 0.$$

EXERCICE 2

1. Montrer que, quels que soient les nombres réels x et y, on a

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x + y)\sin(x - y).$$

2. Montrer qu'il existe un nombre réel a, appartenant à l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, tel que, quel que soit le nombre strictement positif k satisfaisant aux relations

$$a - k \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\quad \text{et} \quad a + k \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[,$$

les trois nombres $\sin^2(a - k)$, $\sin^2 a$ et $\sin^2(a + k)$ soient trois termes consécutifs d'une progression arithmétique.

PROBLÈME

d et r étant deux nombres réels donnés tels que $0 < r < d$, on considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$, la droite (Δ) d'équation $x = d$ et le cercle (Γ) de centre O et de rayon r.
L'axe $x'\mathrm{O}x$ est coupé par (Δ) en B et par (Γ) en A d'abscisse r et en A$'$ d'abscisse $-r$. On pose

$$\left(\Delta'\right) = (\Delta) - \{\mathrm{B}\}.$$

M étant un point quelconque de $\left(\Delta'\right)$, la droite MA coupe (Γ) en un point P distinct de A ; de même, la droite MA$'$ recoupe (Γ) en P$'$.

1. Quelle est, dans l'inversion de pôle M qui laisse (Γ) invariant, la figure transformée du cercle (Ω) circonscrit au triangle MPP$'$?
   Montrer que (Ω) est orthogonal à (Γ).
2. À tout point M de $\left(\Delta'\right)$, on associe le point ω, centre du cercle (Ω).
   Quel est l'ensemble des points ω lorsque M décrit $\left(\Delta'\right)$?
3. Montrer que, lorsque M décrit $\left(\Delta'\right)$, la droite PP$'$ passe par un point fixe S.
   Exprimer les coordonnées de S au moyen de d et de r.
4. M étant un point de $\left(\Delta'\right)$, montrer qu'il existe un cercle (Φ) orthogonal à (Ω) en M et orthogonal à (Γ). Si M est en B, on prend comme cercle (Φ) le cercle orthogonal à $x'\mathrm{O}x$ en B et orthogonal à (Γ). Ainsi, à tout élément M de (Δ), on associe un cercle (Φ). Montrer que, lorsque M décrit (Δ), (Φ) reste tangent à une droite fixe et à un cercle fixe, dont on précisera le centre et le rayon.
5. M est un point de $\left(\Delta'\right)$. Le cercle (Ω) et le cercle circonscrit au triangle MAA$'$ se coupent en M et en un second point, N. Quel est l'ensemble de ces points N lorsque M décrit $\left(\Delta'\right)$?

6. M est un point de (Δ'). Le cercle circonscrit au triangle MAA' coupe l'axe $y'Oy$ en deux points Q et Q$'$.
Construire l'orthocentre du triangle BQQ$'$. Quelle remarque peut-on faire à son sujet ?
Soit K et K$'$ les pieds des hauteurs du triangle BQQ$'$ issues de Q et Q$'$ respectivement. Quel est l'ensemble des points K et K$'$ lorsque M décrit (Δ') ?