Durée : 4 heures

Baccalauréat C Sud Vietnam juin 1972

EXERCICE 1

Le plan affine euclidien, E, étant rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, on associe à tout point M, de coordonnées $(x~;~y)$, son affixe $z = x + \text{i}y$.
Soit T la transformation ponctuelle de E qui, à tout point $M(x~;~y)$ d'affixe z, fait correspondre le point $M'\left(x'~;~y'\right)$ d'affixe z' définie par

$$z' = (1 - \text{i})z + 2 - \text{i}.$$

1. Préciser la nature géométrique de la transformation T ainsi que les éléments géométriques servant à la définir.
2. Quelle est l'image par la transformation T du cercle (C) de centre O et de rayon 1 ?

EXERCICE 2

Si d est le PGCD des deux entiers naturels a et b, quel est le PGCD des entiers

$$a' = 13a + 5b \quad \text{et} \quad b' = 5a + 2b?$$

PROBLÈME

À chaque entier naturel n, non nul, on associe la fonction f_n qui, à tout réel x strictement positif, associe le nombre réel

$$y = f_n(x) = \frac{x^n + 1}{4x^2}.$$

1. Étudier les fonctions f_1 et f_2 $\left[f_1(x) = \dfrac{x+1}{4x^2} \text{ et } f_2(x) = \dfrac{x^2+1}{4x^2}\right]$ et construire leurs courbes représentatives (C_1) et (C_2) dans un plan (P), rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
2. Pour $n > 2$, étudier la fonction f_n :
   a. sa continuité,
   b. son sens de variation ; on désignera par x_n la valeur de x pour laquelle f_n présente un minimum,
   c. les valeurs limites $\displaystyle\lim_{x \to 0} f_n(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_n(x)$.
   On étudiera, suivant la valeur de l'entier n, l'existence d'asymptotes à la courbe (C_n).
   Construire la courbe (C_3) représentative de la fonction f_3 dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
3. Dans cette question, on désire encadrer le nombre x_n.
   a. Suivant la valeur de l'entier n strictement supérieur à 2, comparer les nombres x_n et 1.
   b. Démontrer que la différence $x_n - \dfrac{1}{2}$ a même signe que la différence
   $x_n^n - \dfrac{1}{2^n}$.
   On considère la fonction, φ, qui, à tout nombre réel x strictement positif, associe le nombre

$$\varphi(x) = 2^{x+1} - x + 2.$$

Étudier les variations de la fonction φ et montrer qu'elle est strictement positive, quel que soit le nombre réel x strictement positif.

Montrer que, pour tout entier n strictement supérieur à 4, le réel x_n appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}~;~1\right[$.

4. Étudier l'intersection des courbes (C_n) et $(C_{n'})$, pour deux entiers distincts n et n'. En déduire que toutes les courbes (C_n) passent par un même point, B, dont on précisera les coordonnées.

On suppose $n < n'$; comparer, suivant les valeurs de x strictement positives, les nombres $f_n(x)$ et $f_{n'}(x)$.

En déduire la position relative des courbes (C_n) et $(C_{n'})$.

5. Construire dans le repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$, la courbe représentative, (C), de la fonction qui, à tout réel x strictement positif , associe le nombre $y = \dfrac{1}{4x^2}$.

n étant un entier donné, montrer que la courbe (C) est située en-dessous de la courbe (C_n) et calculer l'aire $\mathscr{A}(t)$ de la partie du plan (P) qui est limitée par les courbes (C) et (C_n) et par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = t$.

Étudier la limite de $\mathscr{A}(t)$ lorsque t tend vers 0.