Baccalauréat Sud Viet-Nam juin 1966
Mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

1. Déterminer le module et l'argument du nombre complexe

$$z = \frac{1+\text{i}\sqrt{3}}{1-\text{i}}.$$

2. Déterminer les entiers naturels n ($n \neq 0$) tels que z^n soit réel. Calculer z^n correspondant à la plus petite des valeurs de n obtenues.
3. Déterminer les entiers naturels n tels que z^n soit imaginaire pur.

EXERCICE 2

1. Étudier les variations des fonctions

$$y_1 = \frac{\sqrt{33}}{2}\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{\sqrt{33}}{2}\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

Construire leurs graphes, (C_1) et (C_2), dans un repère orthonormé, $x'\text{O}x,\ y'\text{O}y$, dont les vecteurs unitaires auront pour module 2 cm.
On étudiera avec soin les branches infinies de (C_1) et (C_2).

2. On désigne par (H) la réunion de (C_1) et (C_2).
Montrer que, pour qu'un point $\text{M}(x\ ;\ y)$ du plan appartienne à (H), il faut et il suffit que

$$y^2 - \sqrt{3}xy + \frac{3}{4} = 0.$$

On rapporte le plan au nouveau repère normé $X'\text{O}X,\ Y'\text{O}Y$ défini par

$$\left(\overrightarrow{x'x},\ \overrightarrow{X'X}\right) = 0 \quad (\text{mod}.\,2\pi), \quad \left(\overrightarrow{X'X},\ \overrightarrow{Y'Y}\right) = \frac{\pi}{3}(\text{mod}.\,2\pi).$$

Établir les relations liant les coordonnées $(x\ ;\ y)$ et $(X\ ;\ Y)$ d'un point du plan dans l'ancien et le nouveau repère.
Quelle est l'équation de (H) dans ce nouveau repère ?
En déduire que (H) est une hyperbole, dont on déterminera les foyers, F et F$'$, les sommets et l'excentricité.

3. M étant un point de l'hyperbole (H), quelconque mais distinct des sommets, on désigne par T et N les points d'intersection de l'axe transverse de (H) avec, respectivement, la tangente et la normale en M à (H), par T$'$ et N$'$ les points d'intersection de l'axe non transverse avec cette tangente et cette normale.
   a. Montrer que les cinq points F, F$'$, M, N$'$ et T$'$ sont sur un même cercle.
   b. Prouver que les cercles de diamètre NT et N$'$T$'$ sont orthogonaux.
   c. Établir les relations

$$\overline{\text{ON}'} \cdot \overline{\text{OT}'} = -2 \quad \text{et} \quad \overline{\text{ON}} \cdot \overline{\text{OT}} = 2.$$