Baccalauréat Général

LYCÉE LUMIÈRE : Luxeuil-les-Bains

ÉPREUVE D'ENTRAÎNEMENT : Avril 2008

MATHÉMATIQUES

SERIE : ES

Enseignement obligatoire

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 5

- ***Ce sujet comporte 4 pages en comptant celle-ci. Le sujet est à rendre avec la copie.***
- ***L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.***
- ***La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.***
- ***Aucune réponse au crayon à papier ne sera prise en compte.***

Exercice 1 *5 points*

Lors d'une enquête réalisée auprès de familles d'une région, concernant leur habitation principale, on apprend que 40% des familles interrogées sont propriétaires de leur logement, 50% en sont locataires et enfin 10% occupent leur logement gratuitement (ces familles seront appelées dans la suite de l'exercice « occupant à titre gratuit »).
Toutes les familles interrogées habitent soit une maison individuelle, soit un appartement ; toute habitation ne contient qu'une seule famille.
75% des propriétaires habitent une maison individuelle, 80% des locataires habitent un appartement et enfin 10% des occupants à titre gratuit habitent une maison individuelle.
On interroge au hasard une famille de la région et on note :

- A l'événement : « la famille habite un appartement » ;
- L l'événement : « la famille est locataire » ;
- P l'événement : « la famille est propriétaire » ;
- G l'événement : « la famille est occupant à titre gratuit ».

On notera $p(E)$ la probabilité de l'événement E. L'événement contraire de E sera noté $\overline{E}$.
$p_F(E)$ désignera la probabilité conditionnelle de l'événement E par rapport à l'événement F.
Dans tout l'exercice, les probabilités seront données sous forme décimale et, au besoin, arrondies au millième.

1. Construire un arbre pondéré résumant la situation.

2. Calculer la probabilité de l'événement : « la famille est propriétaire et habite un appartement ».

3. Établir que la probabilité de l'événement A est égale à 0,59.

4. On interroge au hasard une famille habitant un appartement.
Calculer la probabilité pour qu'elle en soit le propriétaire.

5. On interroge trois familles de la région, le choix de ces familles se faisant aléatoirement et de manière indépendante. Déterminer la probabilité de l'événement :

a) B : « exactement deux des trois familles interrogées habitent un appartement ».

b) C : « au moins une des trois familles interrogées habite un appartement ».

Exercice 2 *3 points*

Dans cet exercice, f désigne la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont on donne ci-dessous le tableau de variations et g désigne la fonction $\ln(f)$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan et A le point de coordonnées $(1; 0)$.
On admet que la tangente à $\mathscr{C}$ en A, notée Δ, a pour coefficient directeur 2 et est située au-dessus de $\mathscr{C}$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
					e		
Var. f			0	$\nearrow$		$\searrow$	1
	?	$\nearrow$					

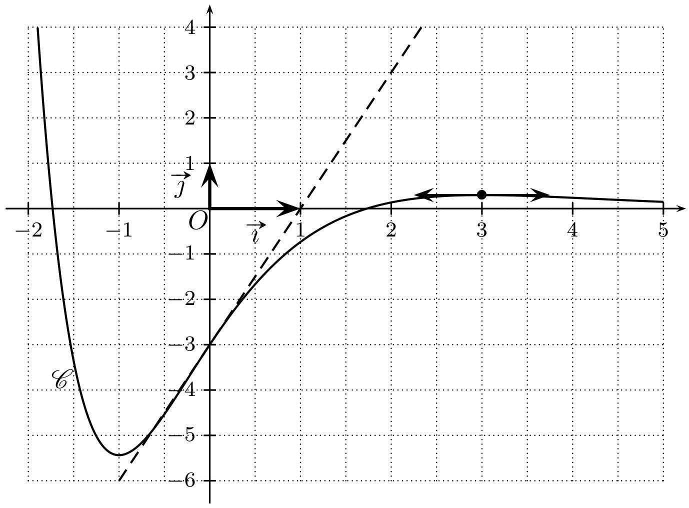
Répondre par vrai (V) ou par faux (F) aux affirmations ci-dessous en cochant la case correspondante. Aucune justification n'est demandée.
Chaque bonne réponse rapporte* 0,25 *point, chaque mauvaise en retire* 0,25*.

	V	F
1. La limite de f en $-\infty$ est $-\infty$.	❒	❒
2. Δ est la droite d'équation $y = 2x - 3$.	❒	❒
3. $f'(5) > 0$.	❒	❒
4. L'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.	❒	❒
5. La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.	❒	❒
6. Toute primitive de f est strictement décroissante sur $[3; +\infty[$.	❒	❒
7. La fonction g est définie et dérivable sur $[1; +\infty[$.	❒	❒
8. La limite de g en $+\infty$ est 0.	❒	❒
9. La fonction g est strictement décroissante sur $[3; +\infty[$.	❒	❒
10. L'image de 3 par g est $\ln(3)$.	❒	❒
11. La fonction h définie par $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ est strictement décroissante sur $[3; +\infty[$.	❒	❒
12. Sur $[3; +\infty[$, la fonction k définie par $k(x) = f(x) + \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante.	❒	❒

Exercice 3 *7 points*

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne la courbe représentative, notée $\mathscr{C}$, ci-dessous.

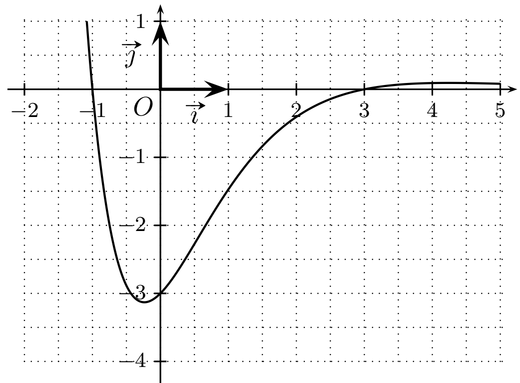


1. Lire sur le graphique $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(3)$.
2. Parmi les quatre courbes données ci-dessous se trouve celle de la fonction f', fonction dérivée de f.

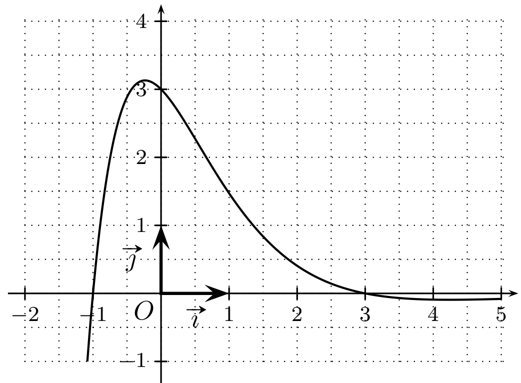
   La retrouver en donnant un argument validant votre réponse.
3. On admet que la fonction f est définie par $f(x) = (x^2+a)e^{bx}$ où a et b sont deux réels.

   a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de x, a et b.

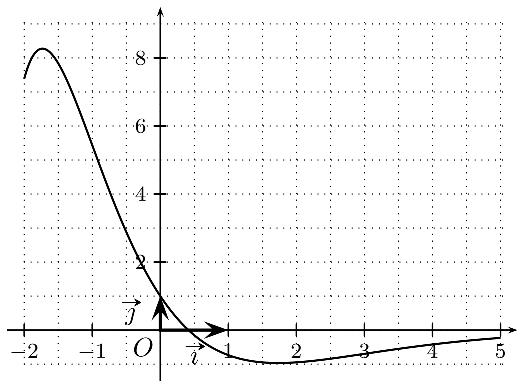
   b) A l'aide des valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$ obtenues à la question **1**, calculer a et b.



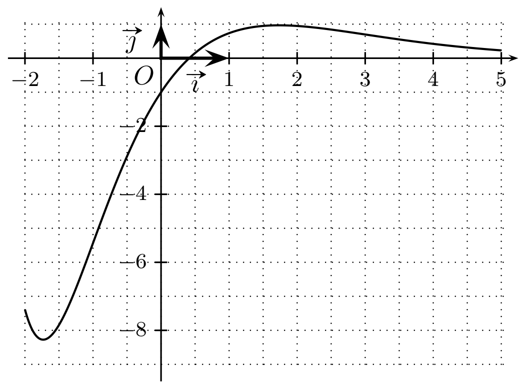
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on admet que f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2-3)e^{-x}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. En remarquant que $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x} - \dfrac{3}{e^x}$, déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
3. Justifier que le signe de $f'(x)$ est donné par celui de $(-x^2+2x+3)$.
4. Résoudre algébriquement l'équation $-x^2+2x+3 = 0$ puis dresser le tableau de signes sur $\mathbb{R}$ de $(-x^2+2x+3)$.
5. Etudier soigneusement les variations de f puis dresser son tableau de variations complet.
6. L'étude des variations de f réalisée dans la question **5** permet d'affirmer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution réelle notée α.

   a) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

   b) Prouver que le réel α est également solution de l'équation $\ln\left(\dfrac{x^2-3}{2}\right) = x$.

EXERCICE 4 *5 points*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, il est demandé de noter la lettre qui correspond à l'unique réponse exacte dans la colonne de droite.

Chaque bonne réponse rapporte 0,5 ***point, une réponse inexacte en retire*** 0,25.

Si le total des points obtenus dans une partie est négatif, il est ramené à zéro.

Partie A : Statistiques et probabilités

On considère la loi de probabilité suivante :

Valeurs	1	2	3	4
Probabilités	0,2	0,4	0,1	0,3

On note μ son espérance, V sa variance et σ son écart-type.

a. $\mu = 2$	b. $\sigma = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$	c. $V = \dfrac{5}{2}$	d. $V = \dfrac{5}{4}$	

On considère la série statistique suivante :

Valeurs	9	11	12	13	16	17
Effectifs	7	20	24	22	20	8

On note $\overline{x}$ sa moyenne et m sa médiane.

a. $\overline{x} = 13$ et $m = 12$	b. $\overline{x} = 13$ et $m = 12,5$	c. $\overline{x} = 12,8$ et $m = 12$	d. $\overline{x} = 12,8$ et $m = 12,5$	

Soit une série statistique à deux variables $(x ; y)$. Les valeurs de x sont 1, 2, 5, 7, 11 et 13 et une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés est $y = 1,35x + 22,8$. Les coordonnées du point moyen sont :

a. $(6,5 ; 30,575)$	b. $(6 ; 30,9)$	c. $(6,5 ; 31,575)$	d. $(6 ; 31,9)$	

On considère la série statistiques à deux variables suivante :

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	22,5	21	19	17	14	12

La droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés a pour équation :

a. $y = -0,5x + 11,6$	b. $y = -2,2x + 25,1$	c. $y = -2,1x + 25,1$	d. $y = 2,2x + 10$	

Soient A et B deux événements indépendants tels que $p(A) = \dfrac{1}{3}$ et $p(B) = \dfrac{1}{12}$. On a alors :

a. $p(A \cup B) = \dfrac{7}{18}$	b. $p(A \cap B) = \dfrac{5}{12}$	c. $p_B(A) = \dfrac{1}{36}$	d. $p(A \cap B) = 0$	

Partie B : Analyse

Pour tous réels a et b, $(e^a)^b \times e^{3b-1}$ est égal à :

a. $\dfrac{e^{(a^b)}}{e^{1-3b}}$	b. $\dfrac{e^{b(a+3)}}{e}$	c. e^{a^b+3b-1}	d. $e^{ab(3b-1)}$	

La fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 4x\ln(x)$ admet pour primitive la fonction :

a. $x \mapsto 4\ln(x) + 4$	b. $x \mapsto x^2(2\ln(x) + 1)$	c. $x \mapsto 2x^2\ln(x)$	d. $x \mapsto x^2(2\ln(x) - 1)$	

L'ensemble des solutions de l'équation $\ln(x^2) = 2$ est :

a. $\{e\}$	b. $\{-e ; e\}$	c. $\{2\}$	d. $\{-2 ; 2\}$	

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^3 + 3x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 7} =$

a. 0	b. $\dfrac{1}{7}$	c. $-\infty$	d. -2	

Pour tout réel x, le nombre $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 2}$ est égal à :

a. $-\dfrac{1}{2}$	b. $\dfrac{e^{-1}}{3}$	c. $\dfrac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 2}$	d. $\dfrac{1 - e^{-x}}{1 + 2e^{-x}}$	