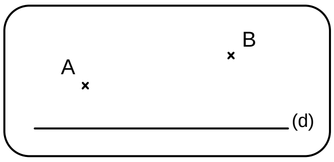
Exercice 486 - 1 Un classique sous contrainte

Construire le point M de (d) qui minimise MA + MB, sans sortir du cadre.

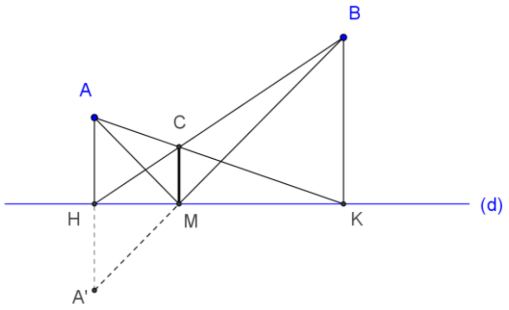


1$^{\text{ère}}$ Partie

L'exercice est connu et ne cache rien d'autre que ce qu'il annonce. J'emprunte alors à Georges Lion sa très jolie remarque : « on peut raisonner sans contrainte… » !

Il s'agira donc de partir $^{\text{et}}/_{\text{ou}}$ de se ramener à "la" solution connue qui utilise le symétrique A' de A par rapport à (d).

- Solution 1 (la plus fréquemment proposée)



On peut éventuellement trouver la construction de C puis de M sans avoir placé A', a priori ; mais il semble qu'on n'y échappe pas pour la démonstration.

- Soit directement comme le propose Jean Fromentin :

A' symétrique de A par rapport à (d), (AK) et (HB) se coupent en C.

(AA') // (BK), (BA') coupe (d) en M.

D'après le théorème de Thalès, $\dfrac{\text{MH}}{\text{MK}} \left(= \dfrac{\text{MA'}}{\text{MB}}\right) = \dfrac{\text{HA'}}{\text{KB}}$.

De même $\left(\dfrac{\text{CH}}{\text{CB}} =\right) \dfrac{\text{CA}}{\text{CK}} = \dfrac{\text{HA}}{\text{BK}}$. Or HA = HA'. Donc $\dfrac{\text{CA}}{\text{CK}} = \dfrac{\text{MH}}{\text{MK}}$.

De ce fait, (MC) // (AH) // (BK).

Cette condition nécessaire est aussi suffisante. Ainsi pour trouver le point M il suffira de construire le point C et d'en abaisser la perpendiculaire sur (d).

- Soit indirectement, en montrant l'égalité des angles $\widehat{\text{AMH}}$ et $\widehat{\text{BMK}}$ -égalité connue pour être équivalente à l'alignement de A', M et B - comme le propose Maryvonne Leberre :

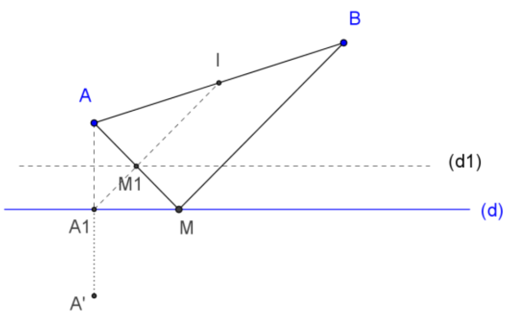
Les droites (AH), (CM) et (BK) sont par construction perpendiculaires à (d) donc parallèles entre elles.

En appliquant le théorème de Thalès aux triangles AHK et CMK, puis BHK et HCM,

on obtient BK.HM = AH.MK, et donc $\dfrac{\text{HM}}{\text{AH}} = \dfrac{\text{MK}}{\text{BK}}$.

On en déduit l'égalité des angles $\widehat{\text{AMH}}$ et $\widehat{\text{BMK}}$ [1]qui permet bien de conclure à l'alignement des points A', M et B.

- Solution 2 (Alain Corre) On "ramène A' dans le cadre" par homothétie de centre A et de rapport ½.

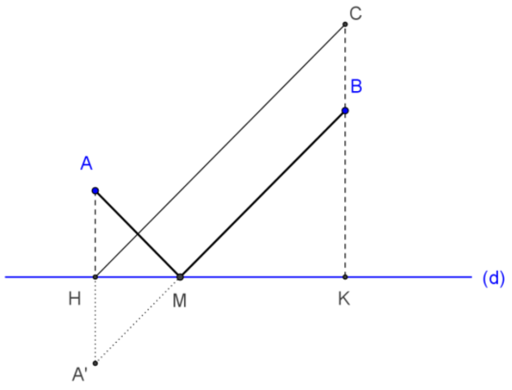


- $A_1 = h(A')$ est la projection orthogonale de A sur (d) ;
- $(d_1) = h((d))$ est la médiatrice du segment $[AA_1]$;
- $I = h(B)$ est le milieu du segment $[AB]$;
- $M_1 = h(M)$ est à l'intersection de (A_1I) et (d_1).

Dans ces conditions, le point M est l'image de M_1 par l'homothétie inverse (de centre A et de rapport 2), c'est à dire l'intersection de (d) et de (AM_1).

[1] Le même travail pourrait être présenté avec les tangentes dans les triangles rectangles, sans évoquer Thalès.

- Solution 3 (François Drouin) On "ramène A' dans le cadre" par translation de vecteur $\overrightarrow{A'H}$.

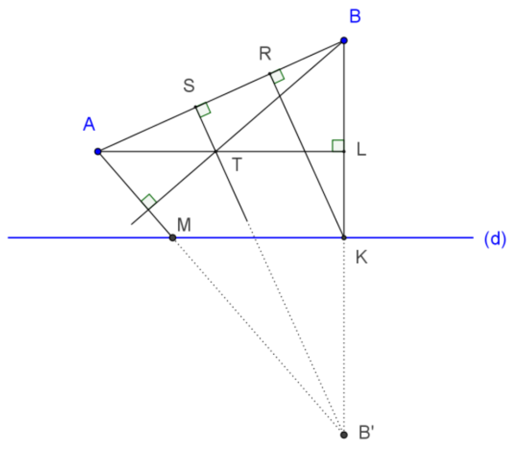


C est l'image de B par cette translation.
A'BCH est un parallélogramme.

Il suffit donc de construire C puis [CH],
puis la parallèle qui passe par B.
Elle coupe (d) en M.

remarque: cette solution nécessite un espace suffisant au-dessus du point B dans le cadre.

- Solution 4 (Giovanni Ranieri) Configuration



Si B′ est le symétrique de B par rapport à (d), il est clair que le point M recherché est l'intersection de [AB′] et (d). Il s'agit de construire le côté [AB′] sans le point B′ (en restant du même côté de d). Pour cela nous allons construire les trois hauteurs du triangle ABB′.

Description de la construction du point M :

- tracer [AB] et le projeté orthogonal K de B sur (d) ;
- placer R, projeté orthogonal de K sur (AB) et S, symétrique de B par rapport à R ;
- placer L, projeté orthogonal de A sur (BK) ;
- mener la perpendiculaire à (AB) passant par S, elle coupe (AL) en T ;
- mener la perpendiculaire à (BT) passant par A, elle coupe (d) en M.

Démonstration :
En utilisant le théorème des milieux dans le triangle BB′S, on démontre que (B′S) = (ST) est une hauteur du triangle ABB′. Par construction, (AL) est la hauteur issue de A dans ce même triangle ; et donc T est l'orthocentre de ce triangle. Par conséquent, (BT) est la troisième hauteur, on détermine ainsi le troisième côté du triangle ABB′, perpendiculaire à (BT) passant par A. Celle-ci coupe (d) en M.

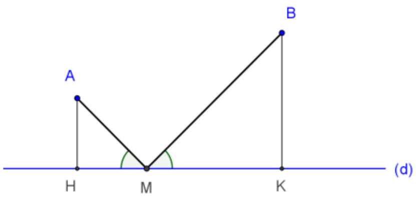
$2^{\text{ème}}$ Partie

L'exercice cache en fait la constatation suivante : celui qui ne connait pas "l'astuce" de la symétrie, ne la trouve pas car ne s'autorise pas à franchir la ligne (le Rubicon), passer de l'autre côté du miroir…

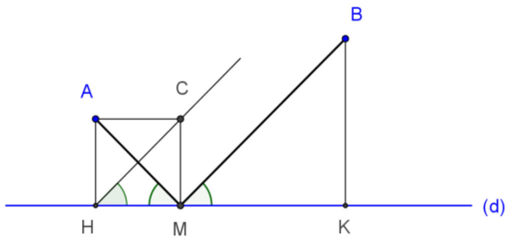
Peut-on imaginer une construction complète, avec validation, sans connaître "la solution de la symétrie" ?

Le scénario qui suit est peut-être envisageable.

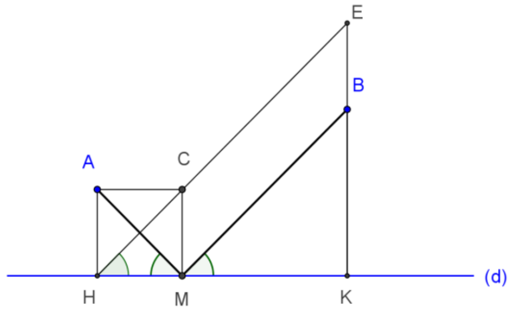
1. Utilisation d'un logiciel de géométrie de laquelle émanerait la conjecture qu'il faut $\widehat{AMH} = \widehat{BMK}$. Ce changement de contrat ne sera peut-être pas aisé …



2. Preuve ou validation de la conjecture
(qui pourrait en fait venir plus tard)

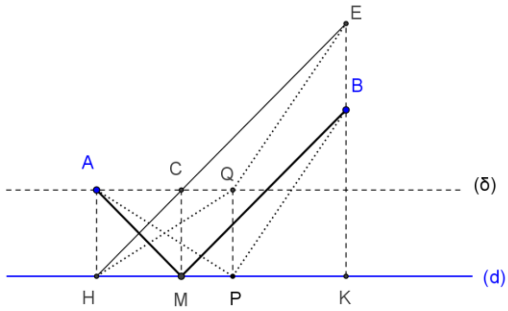


On construit le rectangle AHMC ; alors (HC) // (MB).
(angles correspondants égaux)



Par suite, CMBE est un parallélogramme et ainsi :
AM + MB = HC + CE = HE.

Si on se place ailleurs qu'en M :

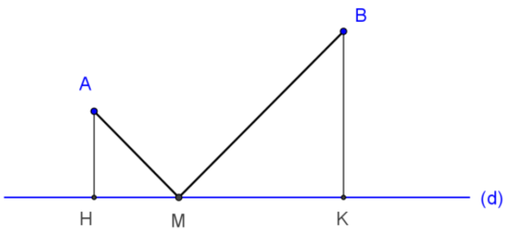


AP + PB = AQ + QE > HE

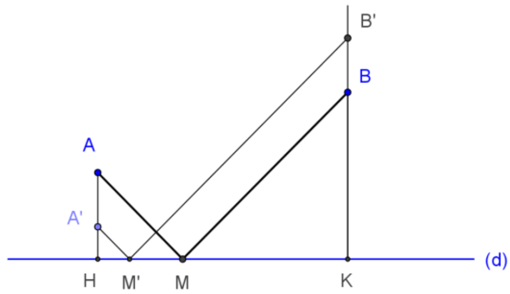
(le plus court chemin serait donc la ligne droite… !?!)

3. <u>lemme</u> *(ça fait sérieux)*

remarque : ce 3. pourrait se situer dans un élan de recherche à la suite du 1.



Si le point M est solution pour A et B …



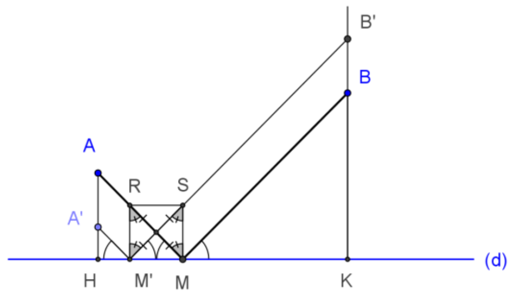
alors en partant de A' et en traçant les parallèles (A'M) puis (M'B), le point M' sera naturellement solution pour A' et B' et de plus A'M'+M'B' = AM + MB.

Preuve :

En traçant le parallélogramme AA'M'R puis la parallèle (MS), il vient que RM'MS est un rectangle (diagonales se coupant au milieu et de même longueur).

Alors AM + MB = AR + RM + MB
= A'M' + M'S + SB'
= A'M' + M'B'.

(on a également AA' = BB')

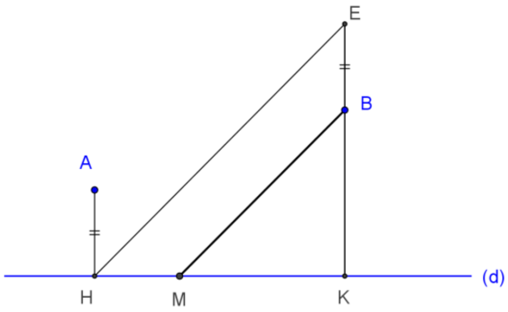


Utilité du lemme. Si on sait construire une solution particulière il n'y aura plus qu'à tracer ensuite des parallèles.

(ah ! se ramener à un cas connu…)

4. Mise en acte

a) Amener A' sur H. La question du plus court chemin est alors réglée puisqu'on part de (d) !
Ce sera en fait le dessin du 2. sur lequel j'étais volontairement passé très vite auparavant.



Il faut construire le point E avec BE = AH,
E∈[KB) et E ∉[KB] ;
(ce qu'il ne faut pas écrire pour ne pas parler de vecteur…)
tracer [EH] puis la parallèle qui passe par (d).

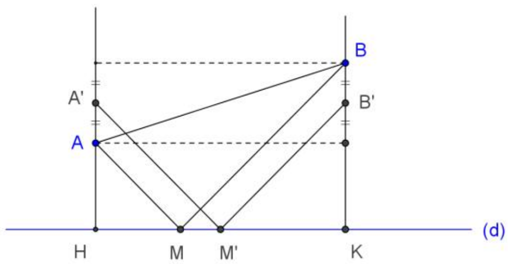
Elle coupe (d) en M.

Cela ressemble beaucoup à la solution proposée par François Drouin et demande également suffisamment de place au-dessus de B.

b) Amener A' et B' au même niveau à même hauteur entre A et B (voir figure)

Il faut placer A' et B', puis M' au milieu de [HK] ;
tracer [A'M'] et [M'B'] et les parallèles respectives qui passent par A et B.

(on en a déjà assez dit auparavant pour constater que cela fonctionne)

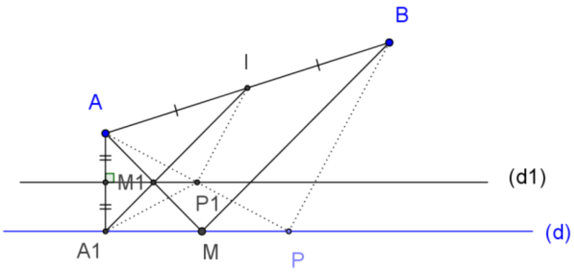


5. Conclusion.

Quand on aura ensuite montré la solution de la symétrie, sa simplicité devrait emporter l'adhésion et l'adoption. Il sera toujours temps de rappeler que le plus court chemin appelle la ligne droite (dans le plan). Et temps de faire alors remarquer que l'idée du symétrique aurait certainement pu se dégager, si l'on avait eu la bonne idée de placer les longueurs AM et MB l'une au bout de l'autre dès la phase 1. de recherche …

Annexe

Une démonstration de la solution 2 de la première partie à qui ne connait pas l'homothétie. (avec les connaissnces de 4e)



en M : $AM + MB = 2\,(AM_1+M_1I)$
$= 2\,(A_1M_1+M_1I)$
$= 2\,A_1I$

en P : $AP + PB = 2\,(A_1P_1+P_1I)$
$> 2\,A_1I$