Baccalauréat L Amérique du Nord juin 2002

Durée : 3 heures

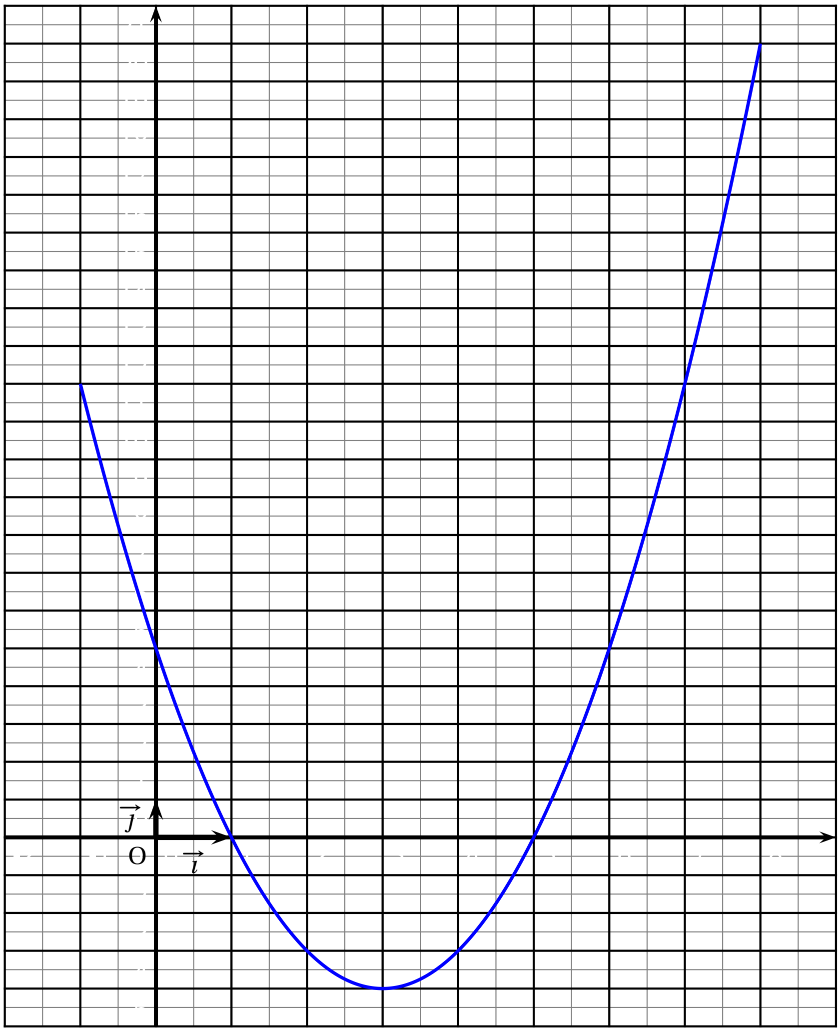
LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT L'EXERCICE 1 ET L'EXERCICE 2 ET AU CHOIX SOIT L'EXERCICE 3 SOIT L'EXERCICE 4.

Une feuille de papier millimétré est mise à la disposition du candidat

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE **8 points**

Partie A

Soit g la fonction définie sur [-1 ; 8] par $g(x) = x^2 - 6x + 5$ et représentée ci-dessous.



1. **a.** Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = 0$.
   b. En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle [- 1 ; 8].
   c. Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = -3$.
2. **a.** La fonction g admet-elle un minimum sur [- 1 ; 8] ?
   b. Vérifier que $g(x) = (x-1)(x-5)$ pour x appartenant à [- 1 ; 8].
   c. Retrouver le signe de $g(x)$ à l'aide d'un tableau.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[-1 ; 8]$ par

$$f(x) = 0,2x^3 - 1,8x^2 + 3x + 4.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité de longueur 1 cm).

1. Calculer la dérivée de f notée f'.
2. Vérifier que $f'(x) = 0,6g(x)$ pour tout x de $[-1~;~8]$ (g est la fonction étudiée dans la **partie A**).
   En déduire le signe de $f'(x)$ et le tableau des variations de la fonction f sur $[-1~;~8]$.
3. Tracer $(\mathscr{C})$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

EXERCICE 2 **7 points**

Un hypermarché, à l'occasion de son 25e anniversaire, organise le jeu suivant :
Dans un premier temps, chaque client reçoit lors de son passage en caisse un bulletin. Ce bulletin comprend 9 cases, 3 rouges et 6 vertes, sous une pellicule grise à gratter.
Chaque client doit gratter seulement 3 cases.
- si le client découvre 3 cases rouges, il gagne un bon d'achat de 100 euros,
- si le client découvre 3 cases vertes, il gagne un bon d'achat de 5 euros,
- dans tous les autres cas, le bulletin est perdant.
Dans un deuxième temps, seuls les bulletins perdants portant le nom du client sont placés dans une urne pour une loterie ultérieure. Un client ne peut déposer qu'un seul bulletin dans cette urne.
Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   a. A « un client du magasin gagne un bon d'achat de 100 euros après un passage en caisse ».
   b. B « un client du magasin gagne un bon d'achat de 5 euros après un passage en caisse ».
2. En déduire que la probabilité de l'évènement « un client ne gagne rien au grattage » est $\dfrac{3}{4}$.
3. Monsieur M. effectue quatre passages en caisse durant la période du jeu.
   Determiner la probabilité que Monsieur M. gagne exactement deux bons d'achats.
4. Pour la loterie, 30 000 bulletins ont été déposés dans l'urne. On tire successivement et sans remise 100 bulletins de l'urne. Chaque bulletin tiré gagne un bon d'achat de 100 euros.
   a. Déterminer la probabilité qu'un bulletin déposé dans l'urne soit gagnant lors de ce tirage.
   b. Démontrer que la probabilité qu'un bulletin soit perdant après le grattage et gagnant après le tirage est $\dfrac{1}{400}$.

EXERCICE 3 **5 points**

Partie A : Étude d'une suite

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1\,500\,000$ et $u_{n+1} = 1,013u_n + 1\,300$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. On pose pour tout entier naturel n, $v_n = u_n + 100\,000$.
   a. Calculer v_0.
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 1,013 v_n$. En déduire la nature de la suite (v_n).
   c. Déterminer v_n en fonction de n.
   En déduire que $u_n = 1\,600\,000 \times (1,013)^n - 100\,000$.
   d. Calculer u_{18}. Le résultat sera arrondi à l'entier le plus proche.

Partie B Application

Pour cette partie, tous les résultats numériques seront arrondis à l'entier le plus proche.
Une étude de la population d'un département laisse apparaître les informations suivantes :

— la population est estimée à 1 500 000 habitants en 2002,
— le taux d'accroissement naturel est de 1,3 % par an,
— le flux migratoire (différence entre le nombre de personnes entrant dans le département et le nombre de personnes en sortant) est estimé à 1 300 habitants par an. On estime que ces données resteront constantes au fil des ans.

1. Déterminer la population estimée de ce département en 2003 et en 2004.
2. On pose $w_0 = 1500000$. Pour tout entier naturel n, on désigne par w_n une estimation du nombre d'habitants de ce département durant l'année $(2002+n)$.
   a. Vérifier que $w_{n+1} = 1,013 w_n + 1300$ pour tout entier naturel n.
   b. En utilisant la **partie A**, déduire une estimation de la population de ce département en 2020.

EXERCICE 4 **5 points**

Partie A : Étude de fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,200]$ par

$$f(x) = \sqrt{100x + 49}.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité : 1 mm).

1. Calculer la dérivée de f, notée f'.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variations, de la fonction f sur $[0\,;\,200]$.
3. Tracer $(\mathscr{C})$.
4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 130$.

Partie B Application

La distance de freinage jusqu'à l'arrêt d'un véhicule automobile est fonction de sa vitesse avant le freinage.
En notant x cette distance exprimée en m (x variant de 10 à 200) et y cette vitesse exprimée en km·h^{-1}.
Les experts d'assurance automobile estiment que $v = f(x)$ où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.

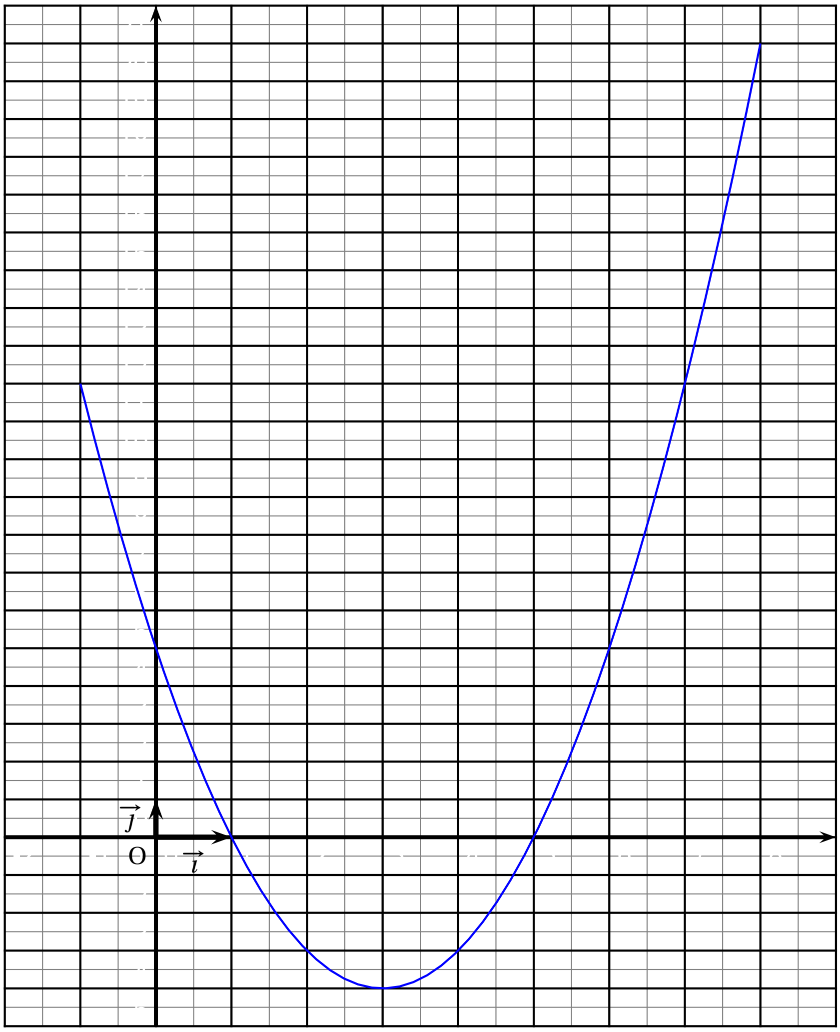
1. Quelle est la vitesse d'un véhicule pour lequel une distance de 100 m est nécessaire pour s'arrêter ?

2. **a.** Quelle est la distance de freinage jusqu'à l'arrêt d'un véhicule roulant à 130 km·h^{-1} ?

   b. Le code de la route impose un délai de 2 secondes entre chaque véhicule. Ce délai est-il suffisant si le véhicule roule à 130 km·h^{-1} ? (Justifier votre réponse.)

Partie A

Soit g la fonction définie sur [-1 ; 8] par $g(x) = x^2 - 6x + 5$ et représentée ci-dessous.



1. **a.** Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = 0$.

   b. En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[-1 ; 8]$.

   c. Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = -3$.

2. **a.** La fonction g admet-elle un minimum sur $[-1 ; 8]$?

   b. Vérifier que $g(x) = (x-1)(x-5)$ pour x appartenant à $[-1 ; 8]$.

   c. Retrouver le signe de $g(x)$ â l'aide d'un tableau.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[-1 ; 8]$ par

$$f(x) = 0,2x^3 - 1,8x^2 + 3x + 4.$$

On appelle ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité de longueur 1 cm).

1. Calculer la dérivée de f notée f'.
2. Vérifier que $f'(x) = 0,6g(x)$ pour tout x de [- 1 ; 8] (g est la fonction étudiée dans la **partie A**).
   En déduire le signe de $f'(x)$ et le tableau des variations de la fonction f sur [- 1 ; 8].
3. Tracer ($\mathscr{C}$) dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

EXERCICE 2 **7 points**

Un hypermarché, à l'occasion de son 25$^{\text{e}}$ anniversaire, organise le jeu suivant :
Dans un premier temps, chaque client reçoit lors de son passage en caisse un bulletin. Ce bulletin comprend 9 cases, 3 rouges et 6 vertes, sous une pellicule grise à gratter.
Chaque client doit gratter seulement 3 cases.
- si le client découvre 3 cases rouges, il gagne un bon d'achat de 100 euros,
- si le client découvre 3 cases vertes, il gagne un bon d'achat de 5 euros,
- dans tous les autres cas, le bulletin est perdant.
Dans un deuxième temps, seuls les bulletins perdants portant le nom du client sont placés dans une urne pour une loterie ultérieure. Un client ne peut déposer qu'un seul bulletin dans cette urne.
Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   a. A « un client du magasin gagne un bon d'achat de 100 euros après un passage en caisse ».
   b. B « un client du magasin gagne un bon d'achat de 5 euros après un passage en caisse ».
2. En déduire que la probabilité de l'évènement « un client ne gagne rien au grattage » est $\dfrac{3}{4}$.
3. Monsieur M. effectue quatre passages en caisse durant la période du jeu.
   Déterminer la probabilité que Monsieur M. gagne exactement deux bons d'achats.
4. Pour la loterie, 30 000 bulletins ont été déposés dans l'urne. On tire successivement et sans remise 100 bulletins de l'urne. Chaque bulletin tiré gagne un bon d'achat de 100 euros.
   a. Déterminer la probabilité qu'un bulletin déposé dans l'urne soit gagnant lors de ce tirage.
   b. Démontrer que la probabilité qu'un bulletin soit perdant après le grattage et gagnant après le tirage est $\dfrac{1}{400}$.

EXERCICE 3 **5 points**

Partie A : Étude d'une suite

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1\,500\,000$ et $u_{n+1} = 1,013u_n + 1\,300$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On pose pour tout entier naturel n, $v_n = u_n + 100\,000$.
   a. Calculer v_0.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 1,013v_n$. En déduire la nature de la suite (v_n).

c. Déterminer v_n en fonction de n.
En déduire que $u_n = 1\,600\,000 \times (1,013)^n - 100\,000$.

d. Calculer u_{18}. Le résultat sera arrondi à l'entier le plus proche.

Partie B Application

Pour cette partie, tous les résultats numériques seront arrondis à l'entier le plus proche.
Une étude de la population d'un département laisse apparaître les informations suivantes :

— la population est estimée à 1 500 000 habitants en 2002,
— le taux d'accroissement naturel est de 1,3 % par an,
— le flux migratoire (différence entre le nombre de personnes entrant dans le département et le nombre de personnes en sortant) est estimé à 1 300 habitants par an. On estime que ces données resteront constantes au fil des ans.

1. Déterminer la population estimée de ce département en 2003 et en 2004.

2. On pose $w_0 = 1\,500\,000$. Pour tout entier naturel n, on désigne par w_n une estimation du nombre d'habitants de ce département durant l'année $(2002+n)$.

a. Vérifier que $w_{n+1} = 1,013w_n + 1300$ pour tout entier naturel n.

b. En utilisant la **partie A**, déduire une estimation de la population de ce département en 2020.

EXERCICE 4 **5 points**

Partie A : Étude de fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,200]$ par

$$f(x) = \sqrt{100x+49}.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité : 1 mm).

1. Calculer la dérivée de f, notée f'.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variations, de la fonction f sur $[0\,;\,200]$.

3. Tracer $(\mathscr{C})$.

4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 130$.

Partie B Application

La distance de freinage jusqu'à l'arrêt d'un véhicule automobile est fonctio de sa vitesse avant le freinage.
En notant x cette distance exprimée en m (x variant de 10 à 200) et y cette vitesse exprimée en km·h^{-1}.
Les experts d'assurance automobile estiment que $v = f(x)$ où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.

1. Quelle est la vitesse d'un véhicule pour lequel une distance de 100 m est nécessaire pour s'arrêter ?

2. **a.** Quelle est la distance de freinage jusqu'à l'arrêt d'un véhicule roulant à 130 km·h^{-1} ?

b. Le code de la route impose un délai de 2 secondes entre chaque véhicule. Ce délai est-il suffisant si le véhicule roule à 130 km·h^{-1} ? (Justifier votre réponse.)