Baccalauréat TL Amérique du Nord juin 2000

EXERCICE 1 — 5 points

Dans tout l'exercice, on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Un disque compact comprenant 8 morceaux est introduit dans le tiroir CD d'une chaîne hi-fi.
La touche RANDOM de la chaîne hi-fi permet d'écouter, lorsqu'on sélectionne cette option, les 8 morceaux du disque compact dans un ordre aléatoire.
On sélectionne l'option RANDOM et l'on écoute l'enchaînement proposé par la chaîne.

1. Combien d'enchaînements distincts la chaîne peut-elle présenter ?
2. Quelle est la probabilité p_1 que la chaîne propose l'enchaînement que vous souhaitiez entendre ?
3. On note A l'évènement : « la chaîne propose le morceau n° 8 en première position ».

   Calculer $p(\text{A})$.
4. On note B l'évènement : « la chaîne propose le morceau n° 7 en deuxième position ».

   Les événements A et B sont-ils indépendants ?
5. Le disque compact comprend 3 morceaux du groupe Zebra, 4 de Pierjanjak et 1 du groupe Interphone.

   On écoute 3 morceaux choisis aléatoirement grâce à la touche RANDOM de la chaîne hi-fi.

   a. Soit X le nombre de morceaux du groupe Zebra présents dans la séquence écoutée.

   Quelles sont les valeurs prises par X ?

   b. Montrer que $p(X = 2) = \dfrac{15}{56}$.

   c. Donner la loi de probabilité de X.

EXERCICE 2 — 5 points

Une balle élastique est lâchée d'une hauteur de 100 centimètres au- dessus du sol. À chaque rebond, la balle remonte aux $\dfrac{9}{10}$ de la hauteur atteinte précédemment.
$h_0 = 100$. Pour n entier supérieur ou égal à 1, on désigne par h_n la hauteur en centimètres atteinte à l'issue du n-ième rebond.

1. Calculer h_1, h_2.
2. Exprimer h_{n+1} en fonction de h_n et en déduire la nature de la suite (h_n).
3. En déduire la valeur de h_n en fonction de n.
4. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $100 \times 0,9^x \leqslant 30$.

   b. À partir de combien de rebonds la balle demeurera-t-elle à moins de 30 centimètres du sol ?
5. La balle rebondit trois fois sur le sol.

   Calculer la distance parcourue par la balle depuis le lâcher jusqu'au moment où elle touche pour la troisième fois le sol.

PROBLÈME 10 points

Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + \ln x.$$

1. **a.** Montrer que g est strictement croissante sur $]0~;~+\infty[$.

   b. Calculer $g(1)$.

2. **a.** Déduire du 1. les résultats suivants :
   si $x \geqslant 1$ alors $x^2 + \ln x \geqslant 1$.
   si $0 < x \leqslant 1$ alors $x^2 + \ln x \leqslant 1$.

   b. Déterminer le signe de l'expression $x^2 + \ln x - 1$ pour x appartenant à $]0~;~+\infty[$.

Partie B. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$$

et on appelle $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ d'unité 2 cm.

1. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$ (on rappelle que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$).
2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{x^2 + \ln x - 1}{x^2}$.
3. En utilisant la partie A, donner le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur $]0~;~+\infty[$.
4. **a.** Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

   b. Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Δ) et préciser les coordonnées de leur point d'intersection I.
5. Déterminer les coordonnées du point J de la courbe $(\mathscr{C})$ où la tangente (T) est parallèle à la droite (Δ).
6. Tracer (Δ), (T) et $(\mathscr{C})$.

Partie C. Calcul d'aire

1. Soit K la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $K(x) = k(\ln x)^2$, où k est une constante.

   a. Calculer $K'(x)$.

   b. En déduire une primitive sur $]0~;~+\infty[$ de la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{1}{x}\ln x$.
2. λ est un réel strictement supérieur à 1.

   a. Calculer, en unités d'aire, puis en cm^2, l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (Δ), et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.

   b. Pour quelle valeur de λ l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ est-elle égale à 8 cm^2 ?