Baccalauréat TL Antilles–Guyane juin 2000

EXERCICE 1 — 5 points

Un gisement de pétrole a produit 200 000 barils en 1987. On note P $_n$ la production de pétrole, exprimée en barils, l'année 1987 + n avec n entier positif.

Partie A

Jusqu'en 1999 inclus, c'est-à-dire pour $n \leqslant 12$, la production P_n a diminué régulièrement de 2 000 barils par an.

1. Calculer P_1 et P_2.
2. Calculer P_n en fonction de n pour n entier compris entre 0 et 12.
3. Quelle est la production de ce gisement en 1999 ?

Partie B

À partir de l'an 2000 (année 2000 incluse), on prévoit une reprise avec une augmentation de la production de 1,5 % par an.

1. Vérifier que la production Q_0 du gisement en l'an 2000 est égale à 178 640 barils.
2. Soit Q_n, avec n entier positif, la production l'année 2000 + n. Le nombre Q_n n'est pas obligatoirement un nombre entier.
   a. Quelle est la nature de la suite $\left(Q_n\right)$?
   b. Exprimer le terme général Q_n en fonction de n.
   c. À partir de quelle année la production annuelle sera-t-elle supérieure à celle de 1987 ?

EXERCICE 2 — 5 points

20 personnes se rendent à une représentation théâtrale :

— 10 personnes ont payé chacune leur billet 75 francs et sont placées au poulailler ;
— 6 ont payé chacune leur billet 150 francs et sont placées au balcon ;
— 4 ont payé chacune leur billet 200 francs et ont un fauteuil d'orchestre.

1. À la sortie on demande à une personne choisie au hasard le prix de son billet.
   Chaque personne a la même probabilité d'être interrogée.
   Soit X la variable aléatoire associant à chaque personne interrogée le prix de son billet.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique E(X).
2. Dans cette question on interroge trois personnes choisies au hasard et on leur demande le prix de leur billet.
   a. Calculer la probabilité pour qu'elles aient payé la représentation à trois prix différents.
   b. Calculer la probabilité pour qu'une au moins ait vu le spectacle assise dans un fauteuil d'orchestre.

PROBLÈME 10 points

Partie 1

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 8\ln x - 1.$$

Le tableau de variations de la fonction g et sa représentation graphique sont donnés ci-dessous.

1. **a.** Par lecture graphique, déterminer le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$.

   b. Une des solutions est entière. Le vérifier par le calcul.

   c. Une autre solution α, est comprise entre 2 et 4.
   Déterminer à l'aide de la calculatrice un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution α.

2. Déterminer graphiquement selon les valeurs de x le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 5 + \frac{8\ln x}{x} + \frac{9}{x}.$$

et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 centimètre.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Déterminer la limite de f en 0.

   c. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x-5$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

   d. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la droite (Δ) et de la courbe $(\mathscr{C})$.
   Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (Δ).

2. **a.** La fonction dérivée de f est notée f'. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, on a :
   $$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

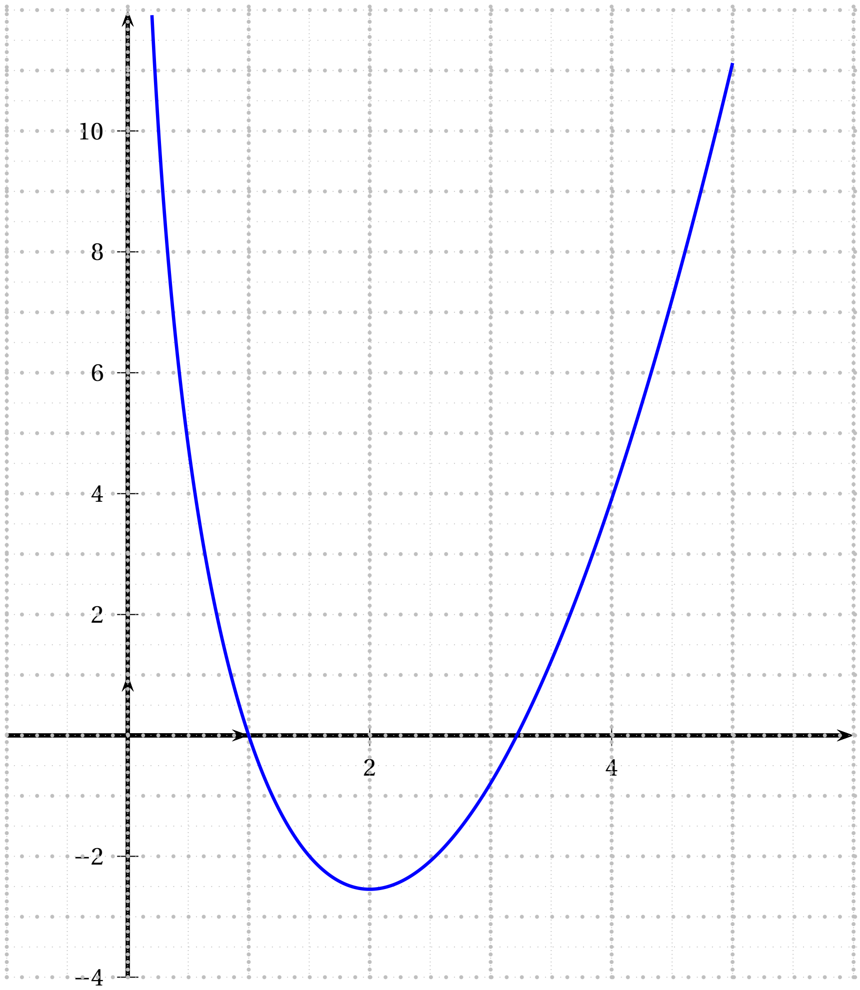
   b. Étudier le sens de variation de la fonction f.

   c. En utilisant la relation $g(\alpha) = 0$, montrer que $f(\alpha) = 2\alpha + \dfrac{8}{\alpha} - 5$.
   En déduire, en utilisant l'encadrement de α de la question 1. 1. c. et cette formule, un encadrement de $f(\alpha)$.
   (Toutes les étapes de calcul doivent être détaillées sur la copie).

3. Représenter graphiquement la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (Δ).

Partie 3

1. Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. Calculer l'aire en centimètres carrés de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 9$. On justifiera le signe de $f(x)$ pour x dans l'intervalle $[1~;~9]$.



x	0		2		$+\infty$
g	‖	↘		↗	