Baccalauréat L Antilles juin 2001

EXERCICE 1 **4 points**

Au 1er janvier 2000, l'abonnement à internet pour un forfait de 20 heures était proposé par une société au tarif de 90 F par mois.
Le tarif est révisé au 1er janvier de chaque année.
On note P_n le prix mensuel (non arrondi) de l'abonnement en francs, au 1er janvier de l'année $(2000+n)$.
P_0 est donc égal à 90.
Une étude de marché envisage 3 scénarii d'évolution de ce prix.
On donnera tous les résultats demandés arrondis au centime.

Question 1 : Premier scénario
Le prix mensuel de l'abonnement subit une diminution de 10 % chaque année.
a. Calculer P_1 et P_2.
b. Exprimer le terme général P_n en fonction de n et calculer P_{10}.

Question 2 : Deuxième scénario
On prend comme hypothèse que la suite (P_n) est arithmétique.
Calculer alors P_{10} sachant que P_1 est égal à 85.

Question 3 : Troisième scénario
On suppose que la suite (P_n) vérifie pour tout entier naturel n la relation suivante

$$P_{n+1} = 0,8P_n + 6.$$

a. Calculer P_1 et P_2.
b. La suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par $U_n = P_n - 30$.
Montrer que (U_n) est une suite géométrique de raison 0,8.
c. En déduire P_n en fonction de n et calculer P_{10}.

Question 4 :
Quel scénario conduit à l'abonnement mensuel le moins cher en 2010 ?

EXERCICE 2 **5 points**

Une urne contient 4 boules en or et 3 boules en acier indiscernables au toucher.
Un joueur tire au hasard simultanément 3 boules dans cette urne.
Les probabilités demandées seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Soit O l'évènement : « le candidat tire 3 boules en or ».
   Déterminer la probabilité $p(\text{O})$ de cet évènement.
2. Dans cette question, chaque boule en or rapporte 100 F, chaque boule en acier rapporte 10 F.
   Soit X la variable aléatoire qui désigne le gain d'un tirage.
   a. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
   b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   c. Calculer l'espérance mathématique $\text{E}(X)$. Donner l'espérance de gain arrondie au franc.
3. **Dans cette question :**
   - Si le joueur tire 3 boules en or, il gagne 1 000 F puis il doit répondre à une question.

   S'il donne la bonne réponse, il double son gain sinon il repart avec 1 000 F.
   On estime que le candidat a 7 chances sur 10 de donner la bonne réponse.
   - Si le joueur ne tire pas 3 boules en or, il ne gagne rien.

   a. Calculer la probabilité pour que le candidat gagne 2 000 F.

b. La probabilité pour que le joueur gagne 1 000 F étant égale à $\dfrac{6}{175}$ (on ne demande pas de le vérifier), calculer l'espérance de gain dans cette question. On arrondira le résultat au franc.

PROBLÈME **11 points**

Les deux tracés demandés en partie I question **6.** et en partie II question **4.** seront effectués sur des figures séparées. On prendra un repère orthonormal, l'unité graphique étant 1 cm.

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{8x}{x^2+4}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f.

1. Montrer que l'origine du repère est centre de symétrie de la courbe $(\mathscr{C})$.

2. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. En déduire que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote au voisinage de $+\infty$.

c. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à cette asymptote pour les points d'abscisses positives.

3. **a.** Montrer que pour tout réel x on a $f'(x) = \dfrac{8(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$.

b. Étudier le sens de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

4. **a.** Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

b. Montrer que pour tout réel x strictement positif on a : $f(x) < 2x$.

c. En déduire la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (T) pour les points d'abscisse positives.

5. Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite d'équation $y = 1$ puis en donner les valeurs arrondies au centième.

6. Tracer la droite (T) et la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie II

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = 4\ln\left(\frac{x^2+4}{4}\right).$$

1. Calculer la limite de F en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Montrer que F est la primitive de f qui s'annule en 0.
En déduire les variations de la fonction F sur $[0~;~+\infty[$.

3. Montrer que l'équation $F(x) = 1$ admet une solution unique α dont on donnera une approximation au centième près.

4. Construire la représentation graphique de la fonction F sur $\mathbb{R}$ et placer le réel α.

5. Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la surface limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.
Calculer $\mathscr{A}$, puis en donner une valeur approchée au centième près.