# ∽ Baccalauréat TL Asie juin 2000 ∾

## EXERCICE 1 — 5 points

Anastase, jardinier amateur, avait une magnifique pelouse de gazon autour de sa maison. Il habite à la campagne et tous les ans 20 % du gazon est détruit pendant l'été et remplacé par du chiendent.
Chaque année, à l'automne, il arrache 50 m$^2$ de chiendent et le remplace par du gazon.
*Dans tout l'exercice les surfaces seront exprimées en mètres carrés.*

1. La surface initiale de la pelouse est exprimée par $U_0$ et la surface de gazon sans chiendent restant au bout de $n$ années est exprimée par $U_n$.
   Montrer que pour tout entier $n$ on a $U_{n+1} = 0,8U_n + 50$.
2. Sachant que $U_2 = 1\,370$, déterminer la surface initiale de la pelouse.
3. On considère la suite $(V_n)$ définie dans $\mathbb{N}$ par $V_n = U_n - 250$.
   Montrer que la suite $(V_n)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme $V_0$ et la raison.
4. Exprimer le terme général $V_n$ en fonction de $n$, puis $U_n$ en fonction de $n$.
5. Déterminer le nombre d'années pendant lesquelles Anastase garde plus du quart de sa pelouse sans chiendent.

## EXERCICE 2 — 5 points

Une caisse contient deux types de tablettes de chocolat : des tablettes de chocolat au lait et des tablettes de chocolat noir.
Certaines tablettes contiennent un bon pour recevoir un cadeau :

— parmi les tablettes de chocolat au lait, 12 % contiennent un bon ;
— parmi les tablettes de chocolat noir, 15 % contiennent un bon.

Dans la caisse, deux tablettes sur trois sont des tablettes de chocolat au lait.
On prend au hasard une tablette de chocolat dans cette caisse.
Tous les tirages sont équiprobables.
On considère les évènements suivants :

— L : « la tablette obtenue est une tablette de chocolat au lait » ;
— N : « la tablette obtenue est une tablette de chocolat noir » ;
— B : « la tablette obtenue contient un bon ».

On ne demande pas de valeur approchée des résultats.

1. **a.** Traduire l'énoncé en terme de probabilités en donnant les probabilités p(L) et p(N) des évènements L et N.
   **b.** Donner la probabilité $P(B|N)$ que la tablette contienne un bon sachant que c'est du chocolat noir, ainsi que la probabilité $P(B|L)$.
2. Déterminer la probabilité $P\left(\overline{B}|N\right)$ où $\overline{B}$ représente l'évènement contraire de B.
3. **a.** Déterminer la probabilité que la tablette obtenue soit une tablette de chocolat au lait contenant un bon.
   **b.** Déterminer la probabilité que ce soit une tablette de chocolat noir contenant un bon.
   **c.** En déduire la probabilité que la tablette obtenue permette de recevoir un cadeau.
4. La tablette obtenue contient un bon. Quelle est alors la probabilité que ce soit une tablette de chocolat au lait ?

## PROBLÈME 10 points

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x} + \frac{2}{9}x.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On prendra pour unités graphiques : 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses ; 10 cm pour une une unité sur l'axe des ordonnées.

**A. Question préliminaire**

La fonction $g$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2.$$

1. Vérifier que $g(x) = (2e^x - 1)(e^x - 2)$.
2. En déduire selon les valeurs de $x$ la signe de $g(x)$.

**B. Étude de la fonction *f***

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$ ainsi que la limite de $f$ en $-\infty$.
   **b.** La fonction dérivée de $f$ est notée $f'$. Montrer que pour tout réel $x$, $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
2. **a.** Étudier les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.
   **b.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $\left[-\frac{9}{2} ; -4\right]$.
   **c.** Montrer que pour tout $x$ dans l'intervalle $[-\ln 2 ; +\ln 2]$, $f(x)$ est positif.
3. **a.** Montrer que la droite $(D_1)$ d'équation $y = \frac{2}{9}x+1$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$. Étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ et de la droite $(D_1)$.
   **b.** Montrer que la droite $(D_2)$ d'équation $y = \frac{2}{9}x$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.
   Étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ et de la droite $(D_2)$·
4. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et ses asymptotes.

**C. Calcul d'aire**

1. Vérifier que $f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{2}{9}x$.
2. En déduire la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f$ qui s'annule pour $x$ égal à 0.
3. Calculer l'aire en centimètres carrés du domaine du plan compris entre la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\ln 2$ et $x = +\ln 2$.