Baccalauréat L spécialité

L'intégrale de 2000

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Baccalauréat TL Amérique du Nord juin 2000

EXERCICE 1 — 5 points

Dans tout l'exercice, on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Un disque compact comprenant 8 morceaux est introduit dans le tiroir CD d'une chaîne hi-fi.
La touche RANDOM de la chaîne hi-fi permet d'écouter, lorsqu'on sélectionne cette option, les 8 morceaux du disque compact dans un ordre aléatoire.
On sélectionne l'option RANDOM et l'on écoute l'enchaînement proposé par la chaîne.

1. Combien d'enchaînements distincts la chaîne peut-elle présenter ?

2. Quelle est la probabilité p_1 que la chaîne propose l'enchaînement que vous souhaitiez entendre ?

3. On note A l'évènement : « la chaîne propose le morceau n° 8 en première position ».
Calculer $p(\text{A})$.

4. On note B l'évènement : « la chaîne propose le morceau n° 7 en deuxième position ».
Les événements A et B sont-ils indépendants ?

5. Le disque compact comprend 3 morceaux du groupe Zebra, 4 de Pierjanjak et 1 du groupe Interphone.
On écoute 3 morceaux choisis aléatoirement grâce à la touche RANDOM de la chaîne hi-fi.

- **a.** Soit X le nombre de morceaux du groupe Zebra présents dans la séquence écoutée.
Quelles sont les valeurs prises par X ?
- **b.** Montrer que $p(X = 2) = \dfrac{15}{56}$.
- **c.** Donner la loi de probabilité de X.

EXERCICE 2 — 5 points

Une balle élastique est lâchée d'une hauteur de 100 centimètres au- dessus du sol. À chaque rebond, la balle remonte aux $\dfrac{9}{10}$ de la hauteur atteinte précédemment.
$h_0 = 100$. Pour n entier supérieur ou égal à 1, on désigne par h_n la hauteur en centimètres atteinte à l'issue du n-ième rebond.

1. Calculer h_1, h_2.

2. Exprimer h_{n+1} en fonction de h_n et en déduire la nature de la suite (h_n).

3. En déduire la valeur de h_n en fonction de n.

4.
- **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $100 \times 0,9^x \leqslant 30$.
- **b.** À partir de combien de rebonds la balle demeurera-t-elle à moins de 30 centimètres du sol ?

5. La balle rebondit trois fois sur le sol.
Calculer la distance parcourue par la balle depuis le lâcher jusqu'au moment où elle touche pour la troisième fois le sol.

PROBLÈME 10 points

Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + \ln x.$$

1. **a.** Montrer que g est strictement croissante sur $]0~;~+\infty[$.
   b. Calculer $g(1)$.
2. **a.** Déduire du 1. les résultats suivants :
   si $x \geqslant 1$ alors $x^2 + \ln x \geqslant 1$.
   si $0 < x \leqslant 1$ alors $x^2 + \ln x \leqslant 1$.
   b. Déterminer le signe de l'expression $x^2 + \ln x - 1$ pour x appartenant à $]0~;~+\infty[$.

Partie B. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$$

et on appelle $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité 2 cm.

1. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$ (on rappelle que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$).
2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{x^2 + \ln x - 1}{x^2}$.
3. En utilisant la partie A, donner le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur $]0~;~+\infty[$.
4. **a.** Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.
   b. Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Δ) et préciser les coordonnées de leur point d'intersection I.
5. Déterminer les coordonnées du point J de la courbe $(\mathscr{C})$ où la tangente (T) est parallèle à la droite (Δ).
6. Tracer (Δ), (T) et $(\mathscr{C})$.

Partie C. Calcul d'aire

1. Soit K la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $K(x) = k(\ln x)^2$, où k est une constante.
   a. Calculer $K'(x)$.
   b. En déduire une primitive sur $]0~;~+\infty[$ de la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{1}{x}\ln x$.
2. λ est un réel strictement supérieur à 1.
   a. Calculer, en unités d'aire, puis en cm^2, l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (Δ), et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.
   b. Pour quelle valeur de λ l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ est-elle égale à 8 cm^2 ?

∽ Baccalauréat TL Antilles–Guyane juin 2000 ∾

EXERCICE 1 — 5 points

Un gisement de pétrole a produit 200 000 barils en 1987. On note P_n la production de pétrole, exprimée en barils, l'année $1987+n$ avec n entier positif.

Partie A

Jusqu'en 1999 inclus, c'est-à-dire pour $n \leqslant 12$, la production P_n a diminué régulièrement de 2 000 barils par an.

1. Calculer P_1 et P_2.
2. Calculer P_n en fonction de n pour n entier compris entre 0 et 12.
3. Quelle est la production de ce gisement en 1999 ?

Partie B

À partir de l'an 2000 (année 2000 incluse), on prévoit une reprise avec une augmentation de la production de 1,5 % par an.

1. Vérifier que la production Q_0 du gisement en l'an 2000 est égale à 178 640 barils.
2. Soit Q_n, avec n entier positif, la production l'année $2000+n$. Le nombre Q_n n'est pas obligatoirement un nombre entier.
   - **a.** Quelle est la nature de la suite $\left(\mathrm{Q}_n\right)$?
   - **b.** Exprimer le terme général Q_n en fonction de n.
   - **c.** À partir de quelle année la production annuelle sera-t-elle supérieure à celle de 1987 ?

EXERCICE 2 — 5 points

20 personnes se rendent à une représentation théâtrale :

- 10 personnes ont payé chacune leur billet 75 francs et sont placées au poulailler ;
- 6 ont payé chacune leur billet 150 francs et sont placées au balcon ;
- 4 ont payé chacune leur billet 200 francs et ont un fauteuil d'orchestre.

1. À la sortie on demande à une personne choisie au hasard le prix de son billet.
   Chaque personne a la même probabilité d'être interrogée.
   Soit X la variable aléatoire associant à chaque personne interrogée le prix de son billet.
   - **a.** Déterminer la loi de probabilité de X.
   - **b.** Calculer l'espérance mathématique E(X).
2. Dans cette question on interroge trois personnes choisies au hasard et on leur demande le prix de leur billet.
   - **a.** Calculer la probabilité pour qu'elles aient payé la représentation à trois prix différents.
   - **b.** Calculer la probabilité pour qu'une au moins ait vu le spectacle assise dans un fauteuil d'orchestre.

PROBLÈME 10 points

Partie 1

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 8\ln x - 1.$$

Le tableau de variations de la fonction g et sa représentation graphique sont donnés ci-dessous.

1. **a.** Par lecture graphique, déterminer le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$.

   b. Une des solutions est entière. Le vérifier par le calcul.

   c. Une autre solution α, est comprise entre 2 et 4.
   Déterminer à l'aide de la calculatrice un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution α.

2. Déterminer graphiquement selon les valeurs de x le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 5 + \frac{8\ln x}{x} + \frac{9}{x}.$$

et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 centimètre.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Déterminer la limite de f en 0.

   c. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x-5$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

   d. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la droite (Δ) et de la courbe $(\mathscr{C})$.
   Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (Δ).

2. **a.** La fonction dérivée de f est notée f'. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, on a :
   $$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

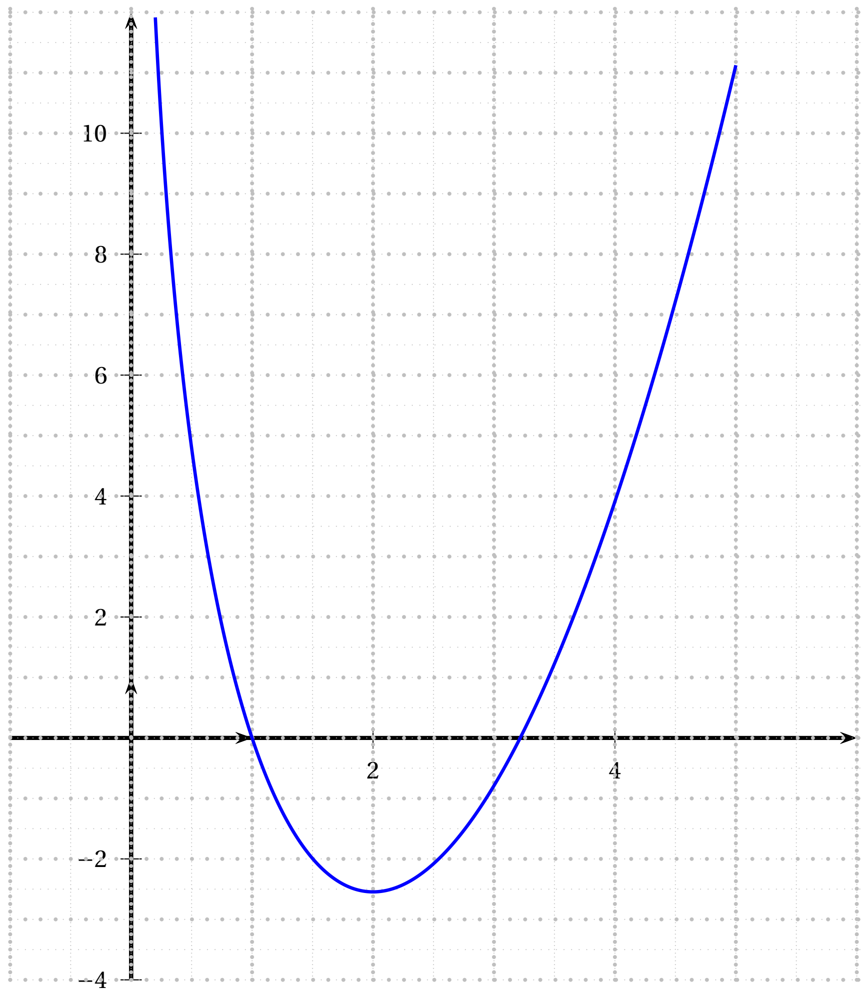
   b. Étudier le sens de variation de la fonction f.

   c. En utilisant la relation $g(\alpha) = 0$, montrer que $f(\alpha) = 2\alpha + \dfrac{8}{\alpha} - 5$.
   En déduire, en utilisant l'encadrement de α de la question 1. 1. c. et cette formule, un encadrement de $f(\alpha)$.
   (Toutes les étapes de calcul doivent être détaillées sur la copie).

3. Représenter graphiquement la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (Δ).

Partie 3

1. Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. Calculer l'aire en centimètres carrés de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 9$. On justifiera le signe de $f(x)$ pour x dans l'intervalle $[1~;~9]$.



x	0		2		$+\infty$
g	‖	↘		↗	

Baccalauréat TL Asie juin 2000

EXERCICE 1 **5 points**

Anastase, jardinier amateur, avait une magnifique pelouse de gazon autour de sa maison. Il habite à la campagne et tous les ans 20 % du gazon est détruit pendant l'été et remplacé par du chiendent.
Chaque année, à l'automne, il arrache 50 m^2 de chiendent et le remplace par du gazon.
Dans tout l'exercice les surfaces seront exprimées en mètres carrés.

1. La surface initiale de la pelouse est exprimée par U_0 et la surface de gazon sans chiendent restant au bout de n années est exprimée par U_n.
   Montrer que pour tout entier n on a $\text{U}_{n+1} = 0,8\text{U}_n + 50$.
2. Sachant que $\text{U}_2 = 1\,370$, déterminer la surface initiale de la pelouse.
3. On considère la suite (V_n) définie dans $\mathbb{N}$ par $\text{V}_n = \text{U}_n - 250$.
   Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme V_0 et la raison.
4. Exprimer le terme général V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.
5. Déterminer le nombre d'années pendant lesquelles Anastase garde plus du quart de sa pelouse sans chiendent.

EXERCICE 2 **5 points**

Une caisse contient deux types de tablettes de chocolat : des tablettes de chocolat au lait et des tablettes de chocolat noir.
Certaines tablettes contiennent un bon pour recevoir un cadeau :

— parmi les tablettes de chocolat au lait, 12 % contiennent un bon ;
— parmi les tablettes de chocolat noir, 15 % contiennent un bon.

Dans la caisse, deux tablettes sur trois sont des tablettes de chocolat au lait.
On prend au hasard une tablette de chocolat dans cette caisse.
Tous les tirages sont équiprobables.
On considère les évènements suivants :

— L : « la tablette obtenue est une tablette de chocolat au lait » ;
— N : « la tablette obtenue est une tablette de chocolat noir » ;
— B : « la tablette obtenue contient un bon ».

On ne demande pas de valeur approchée des résultats.

1. **a.** Traduire l'énoncé en terme de probabilités en donnant les probabilités p(L) et p(N) des évènements L et N.
   b. Donner la probabilité P(B|N) que la tablette contienne un bon sachant que c'est du chocolat noir, ainsi que la probabilité P(B|L).
2. Déterminer la probabilité $\text{P}\left(\overline{\text{B}}|\text{N}\right)$ où $\overline{\text{B}}$ représente l'évènement contraire de B.
3. **a.** Déterminer la probabilité que la tablette obtenue soit une tablette de chocolat au lait contenant un bon.
   b. Déterminer la probabilité que ce soit une tablette de chocolat noir contenant un bon.
   c. En déduire la probabilité que la tablette obtenue permette de recevoir un cadeau.
4. La tablette obtenue contient un bon. Quelle est alors la probabilité que ce soit une tablette de chocolat au lait ?

PROBLÈME 10 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} + \frac{2}{9}x.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On prendra pour unités graphiques : 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses ; 10 cm pour une une unité sur l'axe des ordonnées.

A. Question préliminaire

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^x + 2.$$

1. Vérifier que $g(x) = \left(2\mathrm{e}^x - 1\right)\left(\mathrm{e}^x - 2\right)$.
2. En déduire selon les valeurs de x la signe de $g(x)$.

B. Étude de la fonction *f*

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ ainsi que la limite de f en $-\infty$.

   b. La fonction dérivée de f est notée f'. Montrer que pour tout réel x, $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
2. **a.** Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[-\dfrac{9}{2}\ ;\ -4\right]$.

   c. Montrer que pour tout x dans l'intervalle $[-\ln 2\ ;\ +\ln 2]$, $f(x)$ est positif.
3. **a.** Montrer que la droite (D_1) d'équation $y = \dfrac{2}{9}x+1$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $-\infty$. Étudier la position relative de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite (D_1).

   b. Montrer que la droite (D_2) d'équation $y = \dfrac{2}{9}x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.
   Étudier la position relative de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite (D_2).
4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et ses asymptotes.

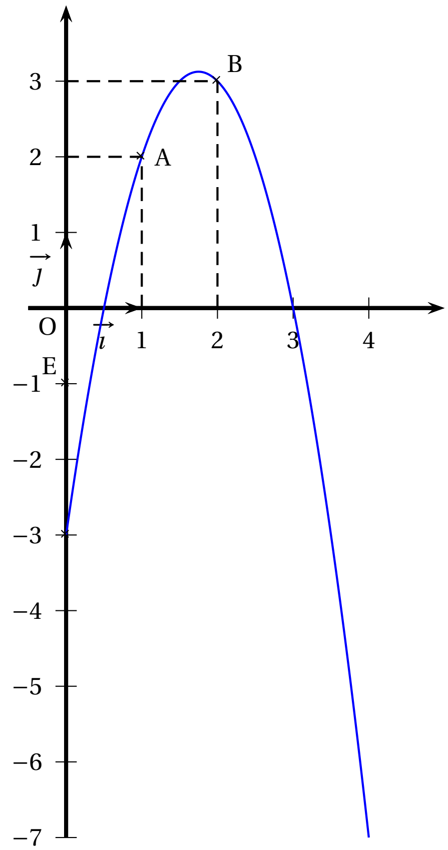
C. Calcul d'aire

1. Vérifier que $f(x) = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} + \dfrac{2}{9}x$.
2. En déduire la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f qui s'annule pour x égal à 0.
3. Calculer l'aire en centimètres carrés du domaine du plan compris entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\ln 2$ et $x = +\ln 2$.

Baccalauréat TL Centres étrangers juin 2000

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On désigne par a, b, c trois nombres réels et on considère la fonction f définie sur [0 ; 4] par : $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sa représentation graphique (Γ) est donnée ci-contre.
Les points A et B sont deux points de (Γ) ; la tangente à la courbe (Γ) au point A passe par le point E(0 ; −1).



1. À l'aide du graphique :
   a. donner l'image par f de 1, puis l'image par f de 2 ;
   b. donner la valeur de $f'(1)$;
   c. déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x) > 0$.
2. Déterminer les trois réels a, b, c à l'aide des résultats précédents.
3. Soit g la fonction définie sur $\left]\dfrac{1}{2} ; 3\right[$ par $g(x) = \ln\left(-2x^2 + 7x - 3\right)$.
   a. Résoudre l'équation $g(x) - 2\ln 3 = \ln\left(\dfrac{2}{9}\right)$.
   b. Résoudre l'équation $g(x) = \ln(3 - x)$.

EXERCICE 2 **5 points**

Une association envoie des ours en peluche à un hôpital pour des enfants malades répartis dans deux pavillons.
Chaque pavillon reçoit deux cartons A et B.
Le carton A contient 5 ours bruns et 5 ours blancs. Le carton B contient 3 ours bruns et 5 ours blancs.

1. Dans l'un des pavillons, une infirmière extrait du carton B, simultanément et au hasard, 3 ours pour les enfants d'une même chambre.
   Calculer la probabilité que :

   a. Les 3 ours soient de la même couleur.
   b. L'un au moins des 3 ours soit brun.

2. Dans l'autre pavillon, un enfant choisit un carton au hasard et prend, toujours au hasard, un ours dans ce carton.
   a. Calculer la probabilité que cet ours soit blanc et provienne du carton A.
   b. Calculer la probabilité que cet ours soit blanc et provienne du carton B.
   c. En déduire que la probabilité de choisir un ours blanc est égale à $\dfrac{9}{16}$.
   d. L'enfant a pris un ours blanc ; quelle est la probabilité que cet ours provienne du carton A ?

PROBLÈME **11 points**

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 4 - x - 2\text{e}^{-x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

Partie A

1. **a.** Étudier la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
   b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 4$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.
   c. Préciser la position relative de $(\mathscr{C})$ et (D).
2. **a.** Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \dfrac{4\text{e}^x - x\text{e}^x - 2}{\text{e}^x}$.
   b. En déduire la limite de f lorsque x tend vers $-\infty$.
   (On pourra utiliser le résultat suivant : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x\text{e}^x = 0$.)

Partie B

1. Calculer $f'(x)$. Donner le sens de variation de f. Donner la valeur exacte du maximum de f.
2. On note A le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse 0.
   Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.
3. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée β, dans l'intervalle $[-1 ; 0]$.
   b. En expliquant la démarche utilisée, donner un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.
4. Tracer les droites (T) et (D), et la courbe $(\mathscr{C})$. On placera, sur la courbe $(\mathscr{C})$, le point A ainsi que le point B d'abscisse β.
5. En observant le graphique :
   a. expliquer pourquoi l'équation $f(x) = 0$ admet une autre solution que β ;
   b. indiquer la condition que doit vérifier le réel m pour que l'équation $f(x) = m$ admette deux solutions distinctes.

Partie C

1. Déterminer la primitive F de f vérifiant $F(0) = 0$.
2. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   a. Donner la valeur exacte de I, puis une valeur décimale approchée de I à 10^{-3}.
   b. Interpréter graphiquement.

Baccalauréat TL Métropole juin 2000

EXERCICE 1 **4 points**

Une boîte contient $4n$ trombones de deux couleurs différentes : $2n+1$ sont jaunes et $2n-1$ sont verts ($n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1$).
On prélève simultanément deux trombones au hasard.

1. Dans cette question on suppose que $n = 10$. Calculer la probabilité des évènement suivants (on donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au millième).

a. A : les deux trombones sont de couleurs différentes.

b. B : les deux trombones sont verts.

c. C : les deux trombones sont de même couleur.

2. Dans cette question, n désigne un entier quelconque supérieur ou égal à 1. On note p_n la probabilité de l'évènement « les deux trombones sont de couleurs différentes ».

a. Montrer que $p_n = \dfrac{4n^2-1}{8n^2-2n}$.

b. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{4x^2-1}{8x^2-2x} \quad \left(x \text{ réel},\ x \neq 0, x \neq \frac{1}{4}\right),$$

dont le tableau de variation est donné ci-après.

x	$-\infty$		0		$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{2+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$4+\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$4-2\sqrt{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

En utilisant ce tableau, déterminer l'entier naturel n pour lequel la probabilité p_n est maximale.

EXERCICE 2 **5 points**

Une municipalité envisage l'aménagement d'un plan d'eau artificiel. Dans le projet, ce plan d'eau devra contenir 30 000 m^3 le 1$^{\text{er}}$ juillet.
On estime qu'en période estivale les pertes hydriques dues à l'évaporation sont de 2 % par jour. Pour les compenser, on prévoit durant les mois d'été un apport, pendant chaque nuit, de 500 m^3.
Le problème est de savoir si les apports prévus pendant les mois de juillet et août seront suffisants pour que le volume ne descende pas en dessous de la valeur critique de 27 000 m^3. On note V_n le volume d'eau en m^3 contenu dans le plan d'eau, selon ce projet, au matin du n^{e} jour qui suit le 1$^{\text{er}}$ juillet. V_0 désigne le volume au matin du 1$^{\text{er}}$ juillet, on a donc $V_0 = 30000$; V_1 désigne le volume au matin du 2 juillet, etc.

1. Calculer V_1, V_2 et V_3.
2. Expliquer pourquoi $V_{n+1} = V_n \times 0,98 + 500$.
3. On considère la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence précédente et ayant pour premier terme $V_0 = 30\,000$.
   a. Cette suite est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier la réponse.
   b. Pour tout entier n, on pose $U_n = V_n - 25\,000$. Démontrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
   c. Exprimer U_n en fonction de n et en déduire que
   $$V_n = 5\,000 \times 0,98^n + 25\,000.$$
   d. Déterminer la limite de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles $V_n < 27\,000$? En déduire la réponse au problème posé en introduction.

PROBLÈME 11 points

On prendra soin de faire figurer sur la copie les calculs intermédiaires conduisant aux résultats présentés.

On considère la fonction f définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = -x + 4 + \ln\frac{x+1}{x-1}.$$

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. étudier les limites de f en 1 et en $+\infty$.
2. Montrer que pour tout réel x de $]1\,;\,+\infty[$ on a : $f'(x) = -\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}$ et en déduire le sens de variations de f sur cet intervalle.
3. **a.** Montrer que la droite D d'équation $y = -x + 4$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
   b. Montrer que, pour tout x de $]1\,;\,+\infty[$, $\dfrac{x+1}{x-1} > 1$ et en déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D.
4. Déterminer les coordonnées du point de $\mathscr{C}$ où la tangente à la courbe a un coefficient directeur égal à $-\dfrac{5}{3}$ et donner une équation de cette tangente Δ.
5. Montrer que, sur l'intervalle $[4\,;\,5]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α. Donner une valeur approchée de α au centième près.
6. Construire la courbe $\mathscr{C}$ et les droites D et Δ sur une feuille de papier millimétré (*on prendra comme unité graphique* 2 cm *sur chaque axe*).
7. **a.** Soit h la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \ln\dfrac{x+1}{x-1}$.
   Montrer que la fonction H définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par :
   $$H(x) = (x+1)\ln(x+1) - (x-1)\ln(x-1)$$
   est une primitive de h sur cet intervalle.
   b. En déduire l'aire en cm^2 du domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$ (on donnera la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au centième).

∽ Baccalauréat TL Polynésie juin 2000 ∾

EXERCICE 1 — 4 points

Pour engager des stagiaires, une entreprise organise des tests de sélection. Parmi les candidats qui se présentent aux épreuves il y a 60 % de garçons. Après avoir pris connaissance des résultats aux tests, l'entreprise engage 70 % des garçons candidats et 80 % des filles candidates.
On choisit au hasard un candidat.

1. **a.** Quelle est la probabilité que ce candidat soit un garçon et qu'il soit engagé comme stagiaire ?

   b. Quelle est la probabilité que ce candidat soit une fille et qu'elle soit engagée comme stagiaire ?

   c. Calculer la probabilité que ce candidat soit engagé.
2. Sachant que le candidat choisi a été engagé, calculer la probabilité que ce soit un garçon.

EXERCICE 2 — 5 points

Dans un pays, le taux de chômage au 1er juillet 1999 est de $11,7$.
Le 1er août 1999, ce taux passe à $11,66$.
On souhaite étudier deux modèles d'évolution mensuelle du taux de chômage, valables pour une durée de trois ans.

1. **Premier modèle :**

   On suppose que ce taux diminue régulièrement de 0,04 par mois.

   On note u_0 le taux de chômage au 1er juillet 1999.

   On note u_1 le taux de chômage un mois après le 1er juillet 1999, c'est-à-dire au 1er août 1999.

   On note u_n le taux de chômage prévu n mois après le 1er juillet 1999, n désignant un entier naturel.

   Ainsi on a : $u_0 = 11,7$ et $u_1 = 11,7 - 0,04$.

   a. Calculer u_2.

   b. Exprimer u_n en fonction de n.

   c. Calculer le taux de chômage prévu au 1er juillet 2002, dans ce modèle.

2. **Deuxième modèle :**

   On suppose que chaque mois la baisse du taux de chômage est multipliée par 1,01.

   On note v_0 le taux de chômage au 1er juillet 1999.

   On note v_1 le taux de chômage un mois après le 1er juillet 1999, c'est-à-dire au 1er août 1999.

   On note v_n le taux de chômage prévu n mois après le 1er juillet 1999, n désignant un entier naturel.

   Ainsi, on a : $v_0 = 11,7$;

   $v_1 = 11,7 - 0,04$;

   $v_2 = 11,7 - 0,04 - 0,04 \times 1,01$;

   $v_n = 11,7 - \left[0,04 + 0,04 \times 1,01 + ... + O,04 \times (1,01)^{n-1}\right]$, pour tout $n \geqslant 1$.

   a. Montrer que $v_n = 15,7 - 4 \times (1,01)^n$.

b. Calculer le taux de chômage prévu au 1er juillet 2002, dans ce modèle. On en donnera un résultat décimal arrondi au centième.

3. Dans chacun des deux modèles, déterminer à partir de quelle date (arbitrairement fixée au premier jour du mois) le taux de chômage prévu sera inférieur à 11.

PROBLÈME 11 points

Soit f la fonction définie pour tout x réel par

$$f(x) = x - 2 + 2(x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

Première partie. Étude d'une fonction annexe

Soit g la fonction définie pour tout x réel par $g(x) = \mathrm{e}^{x} - 2x$.

1. Calculer la dérivée g' de g ; en déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$.

2. Établir le tableau de variation de g (on ne demande pas les limites).

3. En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x réel.

Deuxième partie. Étude des variations de *f*

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$? On rappelle que :

$$\lim_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

b. Montrer que la droite (D) d'équations $y = x - 2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

c. Préciser la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D).

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

3. On note f' la dérivée de f.

a. Calculer $f'(x)$. Montrer que, pour tout x réel, $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

b. En déduire les variations de f.

4. a. Montrer que la tangente (Δ) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0 est parallèle à (D).

b. Tracer (D), (Δ) et $(\mathscr{C})$.

Troisième partie. Calcul d'aire

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ soit une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

2. Soit λ un réel strictement supérieur à 2.

On pose $I(\lambda) = \displaystyle\int_2^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_2^{\lambda} (x-2)\,\mathrm{d}x$.

a. Interpréter $I(\lambda)$ comme l'aire, exprimée en unité d'aire, d'un domaine plan (E) à définir ; on pourra faire apparaître (E) sur la figure.

b. En utilisant les résultats de la question 1 de cette troisième partie, calculer $I(\lambda)$.

c. Déterminer la limite de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Baccalauréat L France septembre 2000

EXERCICE 1 **4 points**

Pour les questions 1 *et* 2 *ci-dessous, une seule des quatre réponses proposées est exacte. On demande à chaque fois d'indiquer laquelle, sans donner de justification.*

1. **a.** On lance une pièce de monnaie six fois de suite et on note, à chaque lancer, le nom du côté visible (Pile ou Face).
   Le nombre de résultats possibles est :

$$2^6 \qquad 6! \qquad 6^2 \qquad C_6^2.$$

   b. On prend simultanément deux cartes au hasard parmi six cartes distinctes et on note l'ensemble de deux cartes obtenu. Le nombre de tirages possibles est :

$$2^6 \qquad 6! \qquad 6^2 \qquad C_6^2.$$

   c. Six personnes s'installent sur une rangée de six sièges. Le nombre de dispositions possibles est :

$$2^6 \qquad 6! \qquad 6^2 \qquad C_6^2.$$

2. Une urne contient six boules indiscernables au toucher : trois blanches, deux noires et une rouge. On tire simultanément trois boules de l'urne au hasard.

   a. La probabilité d'obtenir trois boules blanches est :

$$\frac{1}{20} \qquad \frac{3}{20} \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{2}.$$

   b. La probabilité d'obtenir exactement une boule blanche est :

$$\frac{1}{6} \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{9}{20} \qquad \frac{1}{20}.$$

   c. La probabilité d'obtenir au moins une boule blanche est :

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{2}{3} \qquad \frac{17}{20} \qquad \frac{19}{20}.$$

   Dans la question **3.** *ci-dessous, toutes les réponses devront être justifiées.*

3. Un élève a répondu au hasard et de façon indépendante aux six questions précédentes.

   a. Quelle est la probabilité qu'il ait au moins une réponse exacte ?

   b. Quelle est la probabilité qu'il ait exactement cinq réponses exactes.

EXERCICE 2 **5 points**

La courbe tracée sur la feuille annexe a été tracée à l'aide d'un ordinateur. Elle représente, dans un plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, une fonction f :

- définie et dérivable sur $]-2~;~+\infty[$,
- monotone sur $]-2~;~0]$ et sur $[0~;~+\infty[$,
- ayant pour limite $-\infty$ quand x tend vers -2 et quand x tend vers $+\infty$.

On admet que :

- A, B et C sont des points de cette courbe,

- la tangente au point A passe par le point E,
- la tangente au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Dans cette question, on donnera les résultats sans justification, en s'appuyant sur l'observation du graphique et les indications fournies par le texte.

a. Déterminer $f(-1),\ f(0),\ f(2),\ f'(-1)$ et $f'(0)$.

b. Donner le signe de $f'(x)$, puis celui de $f(x)$.

2. On définit sur $]-2\ ;\ +\infty[$ la fonction g par $g(x) = \left[f(x)\right]^2$.

a. Calculer $g(-1),\ g(0),\ g(2)$.

b. Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} g(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

c. Sachant que $g'(x) = 2f'(x)f(x)$, étudier le signe de $g'(x)$ puis dresser le tableau de variations de g en indiquant les limites.

3. Tracer sur la feuille annexe, qui sera remise avec la copie, une courbe représentative d'une fonction satisfaisant aux résultats obtenus précédemment pour la fonction g.

PROBLÈME **11 points**

On prendra soin de faire figurer sur la copie les calculs intermédiaires conduisant aux résultats présentés.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + \frac{3}{\mathrm{e}^x} - \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}} = x + 3\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - 3\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-2x}.$$

1. Montrer que, pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x - 2)}{\mathrm{e}^{2x}}$.

2. Étudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : étude de la fonction f

1. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = g(x)$. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b. En écrivant $f(x)$ sous la forme $f(x) = x + \mathrm{e}^{-2x}(3\mathrm{e}^x - 1)$, déduire $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

3. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x]$. Interpréter graphiquement ce résultat.

b. On note $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.

4. Montrer que, sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5. Construire la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ sur une feuille de papier millimétré (on prendra comme unité graphique 1 cm sur chaque axe et on se limitera à l'intervalle $[-1,5\ ;\ 4]$).

6. On note $\mathscr{A}_1$ l'aire, en cm^2, de la partie du plan délimitée par la courbe l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$. On note $\mathscr{A}_2$ l'aire, en cm^2, du triangle de sommets O(0 ; 0), M (4 ; 0), N (4 ; 4).

a. Vérifier que $\mathscr{A}_2 = \displaystyle\int_0^4 x\,\mathrm{d}x$ et en déduire que $\mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2 = \displaystyle\int_0^4 [f(x) - x]\,\mathrm{d}x$.

b. Déterminer $\mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2$ (on donnera la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au centième).

Feuille annexe à rendre avec la copie

Exercice 2 : courbe représentative de la fonction f

Les points A, B, C et E ont des coordonnées entières.