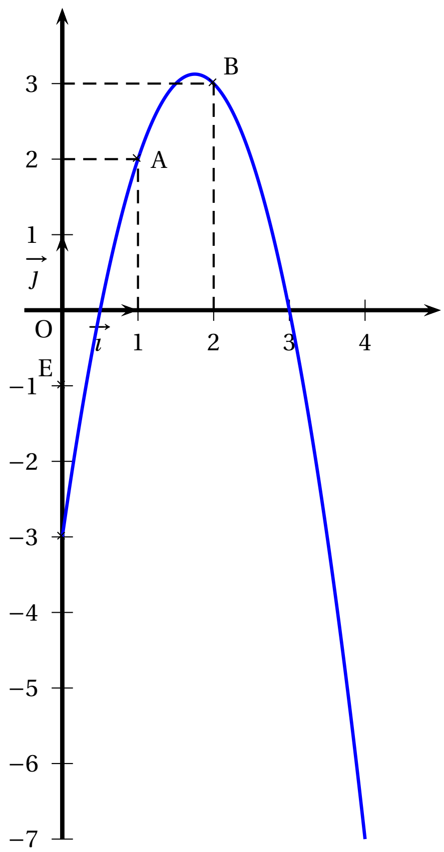
Baccalauréat TL Centres étrangers juin 2000

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On désigne par a, b, c trois nombres réels et on considère la fonction f définie sur $[0 ; 4]$ par : $f(x) = ax^2+bx+c$. Sa représentation graphique (Γ) est donnée ci-contre.
Les points A et B sont deux points de (Γ) ; la tangente à la courbe (Γ) au point A passe par le point E$(0 ; -1)$.



1. À l'aide du graphique :
   a. donner l'image par f de 1, puis l'image par f de 2 ;
   b. donner la valeur de $f'(1)$;
   c. déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x) > 0$.
2. Déterminer les trois réels a, b, c à l'aide des résultats précédents.
3. Soit g la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2} ; 3\right[$ par $g(x) = \ln\left(-2x^2+7x-3\right)$.
   a. Résoudre l'équation $g(x) - 2\ln 3 = \ln\left(\frac{2}{9}\right)$.
   b. Résoudre l'équation $g(x) = \ln(3-x)$.

EXERCICE 2 **5 points**

Une association envoie des ours en peluche à un hôpital pour des enfants malades répartis dans deux pavillons.
Chaque pavillon reçoit deux cartons A et B.
Le carton A contient 5 ours bruns et 5 ours blancs. Le carton B contient 3 ours bruns et 5 ours blancs.

1. Dans l'un des pavillons, une infirmière extrait du carton B, simultanément et au hasard, 3 ours pour les enfants d'une même chambre.
   Calculer la probabilité que :

a. Les 3 ours soient de la même couleur.

b. L'un au moins des 3 ours soit brun.

2. Dans l'autre pavillon, un enfant choisit un carton au hasard et prend, toujours au hasard, un ours dans ce carton.

a. Calculer la probabilité que cet ours soit blanc et provienne du carton A.

b. Calculer la probabilité que cet ours soit blanc et provienne du carton B.

c. En déduire que la probabilité de choisir un ours blanc est égale à $\frac{9}{16}$.

d. L'enfant a pris un ours blanc ; quelle est la probabilité que cet ours provienne du carton A ?

PROBLÈME 11 points

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 4 - x - 2\text{e}^{-x}.$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

Partie A

1. a. Étudier la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.

b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 4$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.

c. Préciser la position relative de $(\mathcal{C})$ et (D).

2. a. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \dfrac{4\text{e}^x - x\text{e}^x - 2}{\text{e}^x}$.

b. En déduire la limite de f lorsque x tend vers $-\infty$.
(On pourra utiliser le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to -\infty} x\text{e}^x = 0$.)

Partie B

1. Calculer $f'(x)$. Donner le sens de variation de f. Donner la valeur exacte du maximum de f.

2. On note A le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse 0.
Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A.

3. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée β, dans l'intervalle $[-1~;~0]$.

b. En expliquant la démarche utilisée, donner un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

4. Tracer les droites (T) et (D), et la courbe $(\mathcal{C})$. On placera, sur la courbe $(\mathcal{C})$, le point A ainsi que le point B d'abscisse β.

5. En observant le graphique :

a. expliquer pourquoi l'équation $f(x) = 0$ admet une autre solution que β ;

b. indiquer la condition que doit vérifier le réel m pour que l'équation $f(x) = m$ admette deux solutions distinctes.

Partie C

1. Déterminer la primitive F de f vérifiant $F(0) = 0$.

2. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Donner la valeur exacte de I, puis une valeur décimale approchée de I à 10^{-3}.

b. Interpréter graphiquement.