

⌘ Baccalauréat L Japon juin 2004 ⌘

Le candidat traitera obligatoirement trois exercices

OBLIGATOIREMENT L'exercice 1 et l'exercice 2

AU CHOIX : L'exercice 3 ou l'exercice 4.

L'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

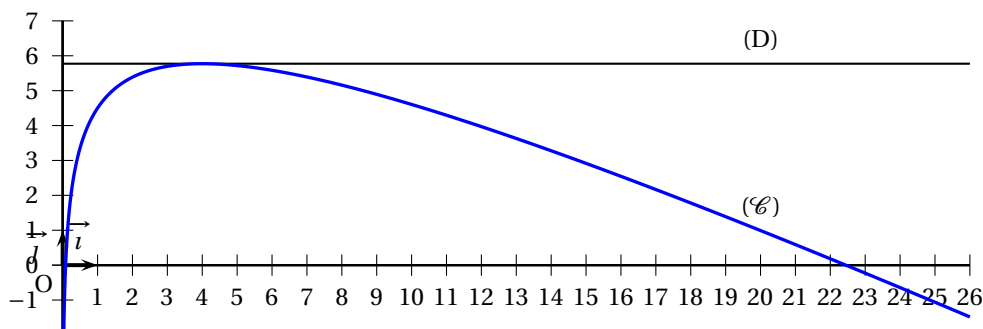
EXERCICE 1 OBLIGATOIRE

7 points

La courbe (\mathcal{C}) ci-dessous est la représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal d'une fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. On note f' la fonction dérivée de f .

La droite (D) est la tangente à la courbe (\mathcal{C}) au point d'abscisse 4 et est parallèle à l'axe des abscisses.

L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe.



Partie A : Lectures graphiques

- Donner par lecture graphique, une valeur approchée à 0,5 près de $f(2)$ et $f(20)$.
 - Donner la valeur exacte de $f'(4)$.
- Donner par lecture graphique, le tableau de variations de la fonction f ainsi que le signe de la dérivée f' .

Partie B : Vérifications algébriques

On suppose que $f(x)$ est de la forme $ax + b + c \ln x$ où a , b et c sont trois réels et \ln désigne la fonction logarithme népérien.

- Exprimer $f'(x)$ en fonction de a , c et x .
 - Le maximum de f étant obtenu pour x égal à 4, en déduire une relation entre a et c .
- Sachant que la courbe représentative de f passe par le point $A(1 ; 4,5)$, donner une relation entre a et b .
 - On sait que le point $B(e ; 7 - 0,5e)$ appartient à la courbe représentative de f . En déduire une relation entre a , b et c .
- Déduire des questions précédentes que l'on a

$$f(x) = -0,5x + 5 + 2 \ln x.$$

- En déduire les valeurs exactes de $f(2)$ et $f(20)$ et du maximum de f .
- Déterminer la limite en 0 de f .

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE

7 points

Partie A

Une retenue d'eau artificielle est alimentée par un ruisseau dont le débit diminue de 20 % d'un jour sur l'autre à cause de la chaleur. Pour la journée du 1^{er} juin le débit D_0 est égal à 300 m^3 par jour.

1. Calculer le débit D_1 pour le 2 juin.
2. Soit D_n le débit pour le n^{e} jour après le 1^{er} juin. Exprimer D_{n+1} en fonction de D_n . Quelle est la nature de la suite (D_n) ?
3. Exprimer D_n en fonction de n . Calculer le débit D_{29} pour la journée du 30 juin. On arrondira au dixième de mètre cube.
4. Calculer le volume d'eau apporté dans la retenue au cours des 30 jours du mois de juin. On arrondira le résultat au mètre cube.

On rappelle que $1 + b + \dots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$.

Partie B

À partir du 1^{er} juillet, le débit du ruisseau peut-être considéré comme nul (inférieur à $0,5 \text{ m}^3/\text{jour}$).

La chaleur provoque dans la retenue une évaporation de 4 % du volume total de l'eau par jour.

De plus, on doit libérer de la retenue 500 m^3 d'eau chaque soir, après évaporation, à cause de la sécheresse.

Le 1^{er} juillet au matin, la retenue contient $V_0 = 100\,000 \text{ m}^3$ d'eau.

1. Soit V_n le volume d'eau au n^{e} matin après le 1^{er} juillet.
 - a. Montrer que V_1 est égal à $95\,500 \text{ m}^3$.
 - b. Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n .
2. On considère la suite de terme général U_n définie pour tout entier n par : $U_n = V_n + 12\,500$.
Montrez que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison 0,96 dont on calculera le premier terme U_0 .
3. Exprimer le terme général U_n en fonction de n . En déduire l'expression de V_n en fonction de n .
4. Calculer V_{31} le volume restant au matin du 1^{er} août. (On arrondira le résultat au mètre cube).
5. À quelle date la retenue sera-t-elle à « sec » ?

EXERCICE 3 AU CHOIX

6 points

Le code d'identification d'un article est formé de sept chiffres entre 0 et 9. Les six premiers chiffres identifient l'article, le septième est une clé de contrôle destinée à déceler une erreur dans l'écriture des six premiers.

On notera $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7$ un tel code. La clé de contrôle x_7 est le reste de la division euclidienne par 10 de la somme : $N = (x_1 + x_3 + x_5) + 7(x_2 + x_4 + x_6)$.

1.
 - a. Vérifier que le code suivant est correct : 2 3 4 1 5 4 7.
 - b. Calculer la clé du code suivant : 9 2 3 4 5 1 •.
 - c. Un des chiffres du code suivant a été effacé : 1 1 2 • 7 7 4. Le calculer.
2. Dans cette question un des chiffres du code est erroné au lieu de saisir $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7$, le dactylographe a frappé $x_1 x_2 x_3 x_5 x_6 x_7$.

- a. Écrire les sommes N_1 et N_2 associées respectivement aux deux codes précédents puis calculer la différence $N_1 - N_2$.
 - b. Montrer que l'équation $7a \equiv 0 \pmod{10}$ où a est un entier compris entre 0 et 9, a pour seule solution 0.
 - c. L'erreur de frappe sera-t-elle détectée ?
3. Dans cette question, deux des chiffres du code ont été intervertis : au lieu de saisir $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7$, le dactylographe a frappé $x_1 x_3 x_2 x_4 x_5 x_6 x_7$.
- a. Écrire les sommes N_1 et N_2 associées à ces deux codes, puis calculer la différence $N_1 - N_2$.
 - b. Donner un exemple de valeurs de x_2 et x_3 pour lesquelles la clé de contrôle ne détecte pas l'erreur.

EXERCICE 4 AU CHOIX**6 points**

Dans cet exercice, on a choisi une unité de longueur qui n'est pas précisée.

On considère trois cercles concentriques (C_1) , (C_2) , (C_3) de centre O et de rayons respectifs 2, 4 et 8 unités.

La figure correspondante est donnée sur la feuille annexe À RENDRE AVEC LA COPIE.

Elle sera complétée au fur et à mesure de l'exercice en faisant apparaître les traits de construction utiles.

1. Construire à la règle et au compas la tangente au point I au cercle (C_1) . Cette droite coupe le cercle (C_2) aux points A et B et le cercle (C_3) au point C.
2. Calculer les distances AI, AB et IC.
3. Montrer que $AC = 2\sqrt{3}(1 + \sqrt{5})$ et vérifier que $\frac{AC}{AB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. On note Φ le nombre $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
4. Le point C' est placé sur la figure.
 - a. Construire, à la règle et au compas, le point D du segment $[AC']$ tel que $\frac{AC'}{AD} = \Phi$.
 - b. Construire un triangle $AB'C'$ isocèle en B' que $\frac{AC'}{AB'} = \Phi$. Un tel triangle est appelé un triangle d'or.
Les traits de construction doivent figurer sur la feuille.
Combien y-a-t-il de solutions ?

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

L'unité de longueur n'est pas le centimètre

