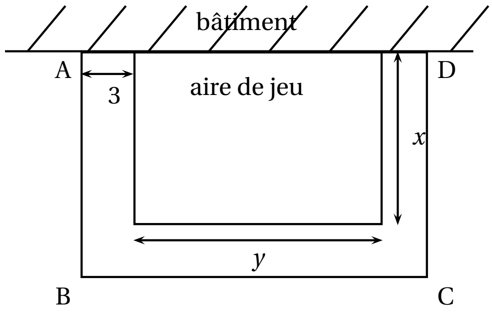
ൟ Baccalauréat L facultatif La Réunion juin 2002 ൟ

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE **7 points**

On veut construire le long d'un bâtiment une aire de jeu rectangulaire de 450 m^2. De plus, on souhaite que les dimensions de ce rectangle soient supérieures ou égales à 10 m. Cet espace de jeu est entouré sur trois cotés d'une allée de 3 m de large comme l'indique le croquis ci-dessous.



L'ensemble est clôturé sur les trois côtés [AB], [BC] et [CD]. On s'intéresse à la longueur L de la clôture : $L = \text{AB} + \text{BC} + \text{CD}$.
On note x et y les dimensions en mètres de l'aire de jeu.

1. **a.** Démontrer que $y = \dfrac{450}{x}$, puis justifier que x appartient à l'intervalle $[10\,;\,45]$.

   b. Exprimer la longueur L en fonction de x.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[10\,;\,45]$ par

$$f(x) = 2x + 12 + \frac{450}{x}.$$

   a. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.

   b. Démontrer que, pour tout x appartenant à $[10\,;\,45]$, $f'(x)$ a le même signe que $(x^2 - 225)$. En déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

   c. Dresser le tableau de variations de f.

3. Déduire de l'étude précédente les dimensions à donner à l'aire de jeu pour que la longueur de la clôture soit la plus petite possible. Quelle est alors cette longueur ?

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **7 points**

Un mobile part d'un point et avance sur une droite. À chaque minute, il se déplace d'un mètre augmenté de la moitié de la distance parcourue pendant la minute précédente.
On pose $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel non nul n, on appelle u_n la distance, en mètres, parcourue durant la n-ième minute. Ainsi $u_1 = 1$.

1. Calculer u_2

2. Établir que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$$

3. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 2$.

   a. Calculer v_0, v_1, v_2.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n.$$

c. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

d. On rappelle que, pour tout réel b différent de 1 et tout entier naturel n supérieur à 2,

$$1 + b + b^2 + . \cdots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}.$$

Calculer $v_0 + v_1 + \cdots + v_{10}$.

4. On désire connaître la distance d parcourue par le mobile au bout de dix minutes, c'est-à-dire $d = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$.

a. Démontrer que $d = v_0 + v_1 + \cdots + + v_{10} + 22$.

b. En déduire la valeur exacte de d.

Le candidat traitera au choix l'exercice 3 ou l'exercice 4

EXERCICE 3 AU CHOIX **6 points**

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I

Nathalie communique avec une amie en fabriquant des messages codés. Chaque lettre de l'alphabet est repérée par son rang x, $1 \leqslant x \leqslant 26$: 1 pour A, 2 pour B, etc.
La lettre de rang x est codée par la lettre de rang y tel que :

$$1 \leqslant y \leqslant 26 \quad \text{et} \quad y \equiv x + 10 \quad (\text{modulo} \quad 26).$$

Exemple : la lettre V a pour rang $x = 22$;
on a $1 \leqslant y \leqslant 26$ et $y \equiv 32 \quad$ (modulo 26), donc $y = 6$. La lettre V est codée par la lettre F.

1. Recopier et dresser le tableau ci-dessous pour toutes les lettres de l'alphabet.

Lettre	A	...	V	...
x	1		22	
y	11		6	
Codage	K		F	

2. Retrouver le codage du mot « ARITHMETIOUE ».

3. Décoder le mot « OEBY ».

Partie II

1. En remarquant que $999 = 27 \times 37$, démontrer que :

$$10^3 \equiv 1 \quad (\text{modulo} \quad 37) \quad \text{et} \quad 10^{30} \equiv 1 \quad (\text{modulo} \quad 37).$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $10^{3n} \equiv 1 \quad (\text{modulo} \quad 37)$.

3. En déduire que le nombre $N = 10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$ est un multiple de 37.
(On pourra remarquer que $10^{10} = 10^9 \times 10$).

Exercice 4 au choix **6 points**

Dans cet exercice on donnera les résultats arrondis à 10^{-2} .
Une urne contient dix boules indiscernables au toucher : une jaune, sept rouges et deux bleues.
Un jeu consiste à tirer d'abord au hasard une boule de l'urne : si cette boule est jaune, alors le jeu s'arrête, sinon on effectue un second tirage sans remettre la première boule tirée dans l'urne.

1. **a.** Quelle est la probabilité de tirer une boule jaune au premier tirage ?
   b. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage ?
   c. Quelle est la probabilité que le joueur tire une boule jaune au deuxième tirage sachant qu'il a tiré un boule rouge au premier tirage ?
2. Dans cette question, on pourra utiliser un arbre de probabilité.
   a. Quelle est la probabilité de tirer une boule bleue au premier tirage et une boule rouge au second tirage ?
   b. Démontrer que la probabilité de tirer une boule rouge au second tirage est $\dfrac{28}{45}$.
3. Un joueur gagne s'il tire une boule rouge au second tirage. Quatre personnes participent à ce jeu indépendamment les unes des autres.
   a. Calculer la probabilité qu'aucune de ces quatre personnes ne gagne.
   b. Calculer la probabilité qu'une au moins de ces quatre personnes gagne.