Baccalauréat L Liban juin 2004

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE **7 points**

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = 54\left(x^3 - 2x^2 + x\right)$$

sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   b. Vérifier que $f'(x) = 54(3x-1)(x-1)$ pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   c. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   d. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
2. Donner le maximum de f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$. Pour quelle valeur de x est-il atteint ?
3. Recopier et compléter le tableau suivant par les valeurs de $f(x)$ arrondies à 0,1 près.
4. Tracer la représentation graphique de la fonction f sur la feuille de papier millimétré jointe, en prenant pour unités graphiques 10 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **6 points**

Des chardons envahissent une pelouse de deux façons différentes. Ce dimanche 13 juin, ils couvrent 300 m^2 de la pelouse. Chaque semaine l'aire de la surface envahie par les chardons augmente d'une part de 4 % par la prolifération des racines, d'autre part de 13 m^2 dus aux graines envolées des jardins voisins.
On appelle u_n l'aire de pelouse, en m^2, envahie par les chardons au bout de n semaines. On a donc $u_0 = 300$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,04 \times u_n + 13$.
3. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n + 325$.
   a. Démontrer que $v_{n+1} = 1,04v_n$.
   b. En déduire que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
4. Exprimer v_n en fonction de n, en déduire que $u_n = 625 \times (1,04)^n - 325$.
5. Au bout de combien de semaines les chardons auront-ils envahi plus de 700 m^2 de la pelouse ?

EXERCICE 3 AU CHOIX **7 points**

« *La lutte incessante entre concepteurs et briseurs de codes a permis une série de remarquables percées scientifiques. Les concepteurs ont cherché à élaborer des codes toujours plus sophistiqués pour protéger les communications, alors que les décrypteurs imaginaient perpétuellement des méthodes plus performantes pour les attaquer... Leur travail a accéléré le développement technologique, notamment dans le cas de l'ordinateur...*
L'art de la communication secrète, aussi appelé cryptographie, fournira à l'âge de l'information ses verrous et ses clefs. »

Histoire des codes secrets - Simon Singh

Le code ASCII (American Standards Code for Information Interchange) en informatique, permet d'associer à chaque caractère (lettre, signe de ponctuation, chiffre, ...) un nombre entier n, compris entre 0 et 255.
Le tableau ci-dessous donne les codes attribués aux lettres de l'alphabet :

lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
code ASCII	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
code ASCII	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

1. « Chiffrement » à clé utilisant l'arithmétique :

Le procédé suivant permet de masquer le mot initial : à chaque nombre n, du Code ASCII correspondant à une lettre donnée, on associe le reste de la division de $7n$ par 256.

Exemple : lettre : B Code ASCII de la lettre B : 66

Calcul du nouveau code de la lettre B : $7 \times 66 = 462$ $\quad 462 = 256 \times 1 + 206$.

Nouveau code de la lettre B : 206

Ainsi le mot BONJOUR sera codé :

MOT	B	O	N	J	O	U	R
Code ASCII	66	79	78	74	79	85	82
nouveau codage	206	41	34	6	41	83	62

Codage du mot CLÉ :

a. Code ASCII de C : 67.

$7 \times 67 = 469$.

Déterminer le reste de la division euclidienne de 469 par 256, en déduire le nouveau code de la lettre C.

b. De la même façon, déterminer le nouveau code de la lettre L, puis de la lettre E, et en déduire le codage du mot CLÉ.

2. « Déchiffrement » :

Soit x le nouveau code de la lettre à découvrir et n son code ASCII.

a. Justifier que $x \equiv 7n \quad [\text{modulo } 256]$.

b. En déduire que $183x \equiv n \quad [\text{modulo } 256]$.

On admet que n est le reste de la division euclidienne de $183x$ par 256.

c. Vérifier que pour $x = 206$ on a bien $n = 66$ qui correspond à la lettre B.

d. Décoder le mot suivant :

206	199	213

EXERCICE 4 AU CHOIX **7 points**

Au cours d'une expérience sur les animaux, on place un rat au départ d'un parcours et il doit choisir une porte de sortie parmi trois portes :

— s'il emprunte la porte A, il sort ;
— s'il emprunte l'une des portes B ou C, il est ramené au départ, et cela jusqu'à ce qu'il choisisse la porte A.

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Partie A

On suppose que le rat n'a aucune mémoire : il choisit une porte au hasard et peut emprunter la même porte plusieurs fois de suite.
Chaque porte a donc la même probabilité d'être choisie.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il sorte dès le premier essai ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'il ne sorte qu'au deuxième essai (le premier étant manqué et le deuxième est réussi) ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'il ne sorte qu'au quatrième essai ?

Partie B

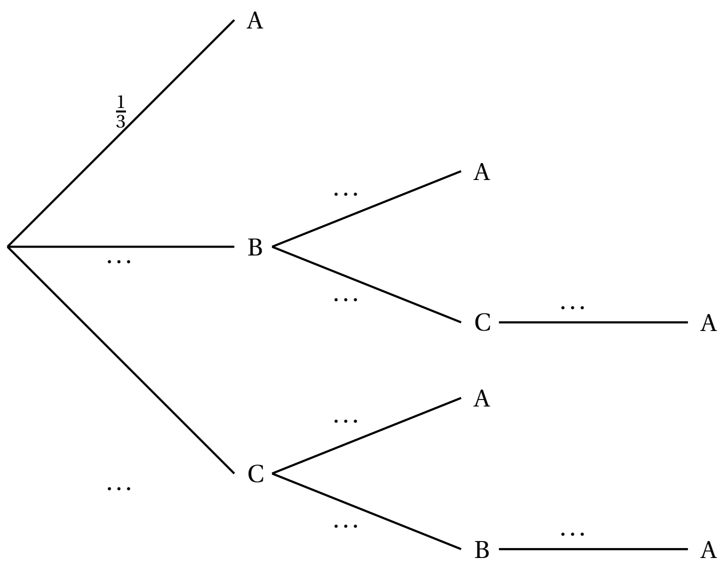
On suppose que le rat a une mémoire parfaite : à chaque étape, il choisit au hasard l'une des portes qu'il n'a jamais empruntée.

1. Sur l'annexe jointe à rendre avec la copie, compléter l'arbre par les pondérations.
2. X désigne le nombre d'essais qu'il lui faut pour sortir. Quelles valeurs peut prendre le nombre X ?
3. Compléter le tableau sur l'annexe jointe à rendre avec la copie.

Annexe exercice 4 (à rendre avec la copie si l'exercice 4 est choisi)

Partie B

a.



Partie B

c.

Valeur de X	1		
Probabilité	$\frac{1}{3}$		