∽ Baccalauréat L facultatif Métropole juin 2004 ∽

L'usage d'une calculatrice est autorisée 3 heures

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré

Le candidat doit traiter **trois** exercices

Obligatoirement : l'exercice 1 et l'exercice 2

Au choix : l'exercice 3 **ou** l'exercice 4

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE **7 points**

Partie I

On considère la fonction f définie sur l'intervalle I = [0 ; 10] par

$$f(x) = x^2 - 10x + 100.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I et montrer qu'elle admet un minimum que l'on précisera.
2. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal avec pour unités un centimètre sur l'axe des abscisses et deux millimètres sur l'axe des ordonnées.
3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 81$.

Partie II

On considère un triangle équilatéral ABC dont les côtés ont pour longueur 10 centimètres et un point M du segment [AB].
Le point N est le point du segment [AC] tel que AN = AM.
Le point H est le pied de la hauteur issue de N dans le triangle ANB.

1. Faire une figure.
2. L'objectif de cette question est de déterminer par le calcul le point M du segment [AB] pour lequel la distance BN est minimale. Les distances sont exprimées en centimètres.

   On pose AM = x.

   a. Déterminer L'intervalle des valeurs possibles pour x.

   b. Déterminer en fonction de x la distance HB.

   c. Montrer que $HN = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

   d. Déterminer en fonction de x la valeur de $\text{B}N^2$.

   e. En utilisant les résultats précédents, déterminer le point M du segment [AB] pour lequel $\text{B}N^2$ est minimal.
3. L'objectif de cette question est de retrouver géométriquement le résultat de la question précédente.

   a. Montrer que la distance BN est minimale lorsque l'angle $\widehat{\text{A}N\text{B}}$ est droit.

   b. Vérifier que l'on retrouve bien la réponse à la question **2.**.

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **6 points**

Au 1er janvier 2004, j'ai une somme u_0 de 1 000 € sur mon compte rémunéré en intérêts composés à 2 % par an.
On note $u_0 = 1000$.
Les intérêts sont versés chaque année le 31 décembre.
Je décide qu'à partir de 2005 je retirerai chaque année 100 € le 1er janvier.
J'appelle u_n le solde au 1er janvier de l'année $(2004 + n)$ après mon retrait de 100 €.

1. **a.** Calculer les soldes u_1 et u_2 de ce compte.

b. La suite de terme général u_n est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

c. Montrer que pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = 1,02u_n - 100$.

2. **a.** On pose, pour tout n entier naturel, $v_n = u_n - 5000$. Calculer v_0.

b. Montrer que pour tout n, $v_{n+1} = 1,02v_n$.

c. Exprimer le terme général v_n de la suite (v_n) en fonction de n.

3. **a.** En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

b. Calculer u_{10} en arrondissant à 0,01 près.

c. À partir du 1$^{\text{er}}$ janvier de quelle année mon compte aura-t-il un solde négatif pour la première fois ?

EXERCICE 3 AU CHOIX — 7 points

Le but de l'exercice est de prouver pour les nombres à quatre chiffres, le critère de divisibilité : « Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3 ».

1. Un exemple

a. Pour un entier naturel n, que signifie La phrase « n est congru à 1 modulo 3 » ?

Traduire à l'aide d'une congruence « n est divisible par 3 ».

b. Pour chacun des nombres suivants, donner l'entier positif le plus petit auquel il est congru modulo 3 : 10, 100, 1 000, 10^p où p est un entier positif.

c. Déterminer le plus petit entier, positif auquel est congru le nombre 4520 modulo 3.

On remarquera que $4520 = 4 \times 1000 + 5 \times 100 + 2 \times 10$.

d. En utilisant la **question b.** trouver le reste de la division de 5 112 par 3.

2. Quelques généralisations

On considère un entier N à quatre chiffres, quatre entiers a, b, c et d entre 0 et 9 tels que $a \neq 0$ et $N = 1000a + 100b + 10c + d$.

Le chiffre des unités est d, celui des dizaines c, des centaines b et des milliers a.

a. Montrer que $N \equiv a + b + c + d \quad \text{modulo} \quad 3$.

b. Justifier, pour les nombres à quatre chiffres, le critère de divisibilité par 3 énoncé au début de l'exercice.

c. Énoncer un critère analogue de divisibilité par 9 et le démontrer pour les nombres à quatre chiffres.

EXERCICE 4 AU CHOIX — 7 points

À l'université de sciences économiques, les étudiants de licence sont répartis en deux filières A et B. Un tiers des étudiants de licence est dans la filière A.
Parmi les étudiants de la filière A, 60 % sont inscrits dans l'option droit.
Parmi les étudiants de la filière B, 90 % sont inscrits dans L'option droit.

1. On interroge un étudiant de licence au hasard.

On note A l'évènement « l'étudiant est dans la filière A ».

On note D l'évènement « l'étudiant est inscrit à l'option droit ».

a. Traduire la situation ci-dessus par un arbre.

b. Montrer que la probabilité pour que l'étudiant soit inscrit dans l'option droit est $p(\text{D}) = 0,8$.

c. Déterminer la probabilité $p_{\overline{\text{D}}}(\text{A})$, probabilité pour que l'étudiant appartienne à la filière A sachant qu'il n'est pas inscrit dans l'option droit.

2. On interroge au hasard successivement trois étudiants de licence. On s'intéresse au nombre d'étudiants inscrits dans l'option droit, parmi les trois étudiants interrogés.
   a. Calculer la probabilité pour que les trois étudiants soient inscrits dans l'option droit.
   b. Calculer la probabilité pour que deux étudiants exactement soient inscrits dans l'option droit.
   c. Calculer la probabilité pour qu'aucun des trois étudiants ne soit inscrit dans l'option droit.
   d. Calculer la probabilité pour qu'au moins un des trois étudiants ne soit pas inscrit dans l'option droit.